Описание вращения в классической физике (Description of rotation in classical physics)

Сомсиков Александр Иванович (Aleksandr Ivanovich Somsikov)

Аннотация. Выполнено сопоставление прямолинейного и вращательного движений и их описаний. Приложен перевод статьи с русского языка на английский.

Abstract. Linear and rotational motion are compared and described. Attached is the translation of the article from Russian into English.

Прямолинейное движение и вращение

Прямолинейное движение может быть равномерным или неравномерным, характеризуемым пройденным путем S, скоростью V движения и ускорением a. Каждая из этих физических характеристик может считаться вектором $\vec{S}$, $\vec{V}$ и $\vec{a}$, причем направления векторов $\vec{S}$ и $\vec{V}$ совпадают, а направление векторов $\vec{V}$ и $\vec{a}$ может совпадать или не совпадать, когда движение ускоряется или замедляется.

При круговом вращении в принципе то же самое, но с одним существенным отличием: каждая из этих трех физических величин пропорциональна радиусу вращения r, т.е. у разных точек кругового вращения являются непостоянной величиной, в отличие от прямолинейных движений. Поэтому для него кроме исходных понятий пройденного пути S, скорости V и ускорения a, называемых также *линейными*, вводятся дополнительные физические характеристики – угловой поворот $\propto$, угловая скорость ω и угловое ускорение β.

Применяемые наименования

Каждое понятие физики имеет вполне определенный смысл. Не все из них имеют собственные наименования, некоторые могут описываться двумя или более словами, совместно используемыми в качестве наименований.

Для лучшего понимания будем записывать эти словесные обозначения слитно, разделяя их косой чертой, – линейное/перемещение S, линейная/скорость V, линейное/ускорение a и соответственно угловое/перемещение $\propto$, угловая/скорость ω, угловое/ускорение β. Слитное написание означает, что здесь эти два слова выражают ОДНО понятие.

В чем состоит их отличие от соответствующих *линейных* характеристик?

Угловая скорость вращения.

Рассмотрим определение, даваемое в физическом справочнике**.**

«Угловой скоростью вращения твердого тела называется вектор w, численно равный первой производной от угла поворота по времени w=dφ/dt и направленный вдоль оси вращения таким образом, чтобы из его конца вращение тела было видно происходящим против часовой стрелки. Направление вектора w совпадает с направлением поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается вместе с телом».

Источник: Б. М. Яворский, А. А Детлаф, Справочник по физике для инженеров и студентов вузов».

В принципе к самому этому довольно сложному определению претензий нет. Авторы справочника добросовестно повторили то, что написано во всех учебниках физики. И что читателям вроде бы должно считаться понятным. Или все же не очень? Вектор ведь обозначает направление, но чего именно и куда?

Если это движение – то, естественно, именно его направление. При этом характеристика движения не одна. Это может быть как собственно перемещение, так и его скорость и ускорение. Но, прежде всего, посмотрим, каков физический смысл самой этой величины угловой/скорости.

Покажем это по аналогии.

Масса и плотность тел

Ньютон определял понятие массы m как произведение плотности p тела на его объем V. В учебниках физики сообщается, что такое определение массы m является неверным, хотя и не объясняется, почему именно. Само по себе это соотношение, конечно, правильное, но в качестве определения массы оно действительно не годится. Так как сразу же вызывает следующий вопрос: а что означает ПЛОТНОСТЬ? – Величина, определяемая массой? – В науке это называется *логическим кругом*, когда понятие A определяется через B, а само B в свою очередь – через A. Логический круг замыкается.

На деле же понятие массы определяется *двумя* законами физики – законом всемирного тяготения $f = \gamma \frac{mM}{r^2}$ и вторым законом Ньютона $f = ma$. Означающих, что $\gamma \frac{mM}{r^2} = ma$ или $M = \frac{1}{\gamma} a r^2$, где M – масса тела 1, a – ускорение, приобретаемое телом 2, r – расстояние между телами, а γ – размерный коэффициент, не имеющий собственного физического смысла и появляющийся вследствие произвольности выбора единицы массы. Его обозначение греческой буквой гамма γ является просто сокращением слова γравитация.

Поэтому *масса* m_1 *тела 1 есть произведение ускорения* a_2, *приобретаемого телом 2, помещаемым на расстоянии* r *от него, на квадрат этого расстояния (с учетом размерного коэффициента* γ, *определяемого произвольностью выбора единицы массы)* http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8715.html .

В связи с полученным определением, возникает такой вопрос. – А может ли масса m_1 считаться *вектором*? – В принципе, да, если учитывать вектор ускорения $\overrightarrow{a_2}$. Однако направление этого вектора *центрировано* относительно тела 1 и изменяется в зависимости от положения тела 2 на окружающей тело 1 сферической поверхности с радиусом r. Масса действует сразу по всем направлениям, не выделяя какое-то определенное. Поэтому и не должна считаться вектором, то есть является скаляром.

Как правильно отметил Ньютон, масса m тела *пропорциональна* его объему V, то есть $m = kV$, где k – коэффициент пропорциональности, связывающий *разные* физические величины и потому имеющий собственную размерность. Этот коэффициент пропорциональности k и называется ПЛОТНОСТЬЮ тела. Введение понятия плотности понадобилось для выполнения сопоставления между собой масс m_1, m_2 разных тел 1, 2. Притом, что масса m каждого тела пропорциональна его объему V. Можно ли избавиться от этой зависимости? Физически – нет, но можно ее обойти, используя при сравнении масс m_1, m_2 одинаковые объемы $V_1 = V_2$.

Приведение к нужному виду.

Но можно еще привести их реально неодинаковые объемы $V_1 \neq V_2$ к условно одинаковому значению, например, единичному посредством деления величин m_1, m_2 на соответствующие объемы V_1, V_2 с получением отношений $\frac{m_1}{V_1}$ и $\frac{m_2}{V_2}$.

Это называется приведением физических величин к нужному виду.

Вот эти-то получаемые отношения и называются *плотностями* тел 1, 2, теперь уже не зависящими от объемов V_1 и V_2. Так что их можно сравнивать между собой взамен сравнения масс m_1, m_2. Сравниваются, таким образом, уже не сами массы m_1, m_2 тел 1, 2, а их плотности $k_1 = \frac{m_1}{V_1}$ и $k_2 = \frac{m_2}{V_2}$.

Линейные и угловые характеристики

А при сравнении между собой разных вращений выполняется в точности то же самое. Их линейные скорости V и ускорения a пропорциональны радиусу r вращения $V = k_1 r$, $a = k_2 r$, где k_1, k_2 – коэффициенты пропорциональности, обладающие размерностями ввиду различия физических величин V, a и r, поэтому их можно сравнивать между собой только при одинаковых радиусах r.

Или же после приведения к единичному радиусу вращения путем деления на него. С получением ДРУГОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ, имеющей другую физическую размерность. Это понимание несколько затрудняется использованием *одинаковых* наименований – скорости и ускорения, хотя бы и *угловых* взамен *линейных*.

Наименование, выражаемое двумя словами, одно из которых существительное, а другое прилагательное, по правилам русского языка означает, что одно из них, именно – существительное является главным, т.е. *существенным*, другое же – поясняющим или второстепенным. И для носителей русского языка получается, что скорость и ускорение как бы и остаются теми, чем были, лишь с некоторым уточнением. Тогда как на самом деле это совершенно другие физические величины, подобно массе и плотности.

Угловая/скорость есть вовсе не линейная/скорость, а угловое/ускорение – не линейное/ускорение, а ДРУГИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, всего лишь имеющие сходные наименования, но при этом совершенно другой физический смысл. Поскольку они, в отличие от линейных скорости и ускорения, от радиуса/вращения НЕ ЗАВИСЯТ.

Введение угловых величин перемещения, скорости и ускорения теперь уже позволяют сравнивать между собой разные вращения, независимо от их радиусов/вращения.

Векторы угловых величин

А чем еще различаются сами вращения кроме угловых физических величин? – Как всякое движение – направлением, а также совпадением или несовпадением направлений скорости и ускорения. Если эти направления совпадают, то вращение ускоряется, а если противоположны, то наоборот замедляется. Значит, для правильного их сравнения необходимо учитывать также и направления. Как это делается? Вот изображение, взятое из Интернета, Рис. 1.

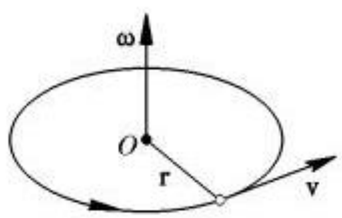


Рис. 1. Векторное изображение угловой и линейной скоростей вращения.

Здесь показано круговое вращение в направлении вектора линейной/скорости $\vec{V}$, величина которой, как уже сказано, пропорциональна радиусу/вращения r. Также добавлена угловая/скорость ω того же вращения, численно определяемая как отношение $\omega = \frac{V}{r}$. Зачем понадобилась сама эта физическая величина ω мы уже знаем, – для приведения линейной/скорости V к единичному радиусу/вращения r, получаемого делением V на r. Полученное значение угловой/скорости ω не зависит от радиуса/вращения r, то есть является одинаковым для любого радиуса. Значит, оно может использоваться как для сравнения различных точек в одном и том же движении на разных радиусах/вращения r_1, r_2, так и для сравнения между собой разных движений с неодинаковыми значениями угловых скоростей ω_1, ω_2.

А что еще можно сказать о векторном понимании $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$? О каком именно направлении здесь может идти речь? – С вектором $\vec{V}$ все понятно. Он указывает *реальное* направление вращения точки в точности так же, как и в прямолинейном движении. А что означает вектор $\vec{\omega}$? На Рис.1 размеры векторов $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$ как и размер радиуса r близки по величине. Что в общем-то затрудняет понимание того, что на самом деле величина вектора $\vec{\omega}$ является отношением $\frac{V}{r}$. То есть прежде всего численно отличается от величины вектора $\vec{V}$. И уже совершенно неясно, что означает направление вектора $\vec{\omega}$, показанное на Рис.1. И почему оно выбрано именно таким, а не каким-то иным? На что оно вообще указывает? – Если на какое-то направление, то тогда чего именно? Реальное-то движение ведь направлено совершенно иначе. Непонятно. К тому же еще прилагается довольно сложное правило, как от этого ПРОИЗВОЛЬНО УСТАНОВЛЕННОГО направления вектора $\vec{\omega}$ переходить к *реальному* направлению вращательного движения.

Так называемое «правило буравчика», по которому нужно направлять движение буравчика при его ввинчивании в направлении вектора $\vec{\omega}$, когда вращение рукоятки буравчика покажет истинное направление кругового движения. То есть сначала мы САМИ ОТХОДИМ от правильного направления вращательного движения к произвольно выбранному направлению вектора $\vec{\omega}$, чтобы затем уже, пользуясь этим тоже вполне искусственным правилом, возвращаться обратно к правильному направлению вращения. А если при этом еще и резьбу самого буравчика случайно или нарочно поменять с правой на левую? Об этом ведь тоже необходимо помнить, чтобы все на свете не перепутать. Ну, и к чему все это искусственное нагромождение сложностей? Ведь физически-то направление вектора $\vec{\omega}$ точно такое же как и самого вектора $\vec{V}$, из которого он, собственно говоря, и получен. Разница заключается только лишь в их размерах, а вовсе не в направлении. Чего, кстати сказать, на само́м Рис. 1 в общем-то и не видно.

Объяснение выбора направления угловых векторов.

Всему этому может быть дано только одно разумное объяснение. Выбор направления вектора $\vec{\omega}$ объясняется нежеланием усложнения изображения с двумя векторами $\vec{V}$ и $\vec{\omega}$ при совпадении их направлений и аналогично – двумя векторами линейного и углового ускорений тоже при совпадении их направлений. Поэтому и решили их *зрительно* разделить, направив угловые векторы по координатной оси, перпендикулярной плоскости вращения с УТРАТОЙ понимания *физического смысла* этих угловых векторов и усложнением обратного перехода от произвольно выбранного их направления к реальному вращению.

Но нужно помнить, что ничего этого ФИЗИЧЕСКИ вовсе не нужно, и эти условные направления, установленные якобы для большей наглядности, не проясняют, а наоборот затрудняют и даже запутывают этот, в общем, довольно простой вопрос.

Равномерное вращение

В равномерном вращении, также как и равномерном прямолинейном движении, представляющем частный случай *инерционного кругового* движения при радиусе кривизны $R \to \infty$ http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8444.html , ускорение a всюду равно нулю, т.к. линейная скорость V вращения постоянна по величине $V = const$, хотя и непостоянна по направлению, а возникающее центробежное ускорение $a_{цб}$ строго уравновешено центростремительным ускорением $a_{цс} = -a_{цб}$, создаваемым силой f тяготения или реакции связи, направленнной к центру вращения http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8713.html .

Неравномерное вращение

Рассмотрим теперь другой случай – неравномерного вращения. В таком движении линейное и угловое ускорения не равны нулю.

В неравномерном вращении в добавление к характеристикам равномерного вращения вводятся дополнительные физические характеристики: *момент силы*, *момент инерции*, *момент количества движения*, *импульс момента сил*.

Посмотрим, как это излагаются в учебниках физики. Воспользуемся учебником, по которому я сам когда-то учился.

С. Э. ФРИШ и А. В. ТИМОРЕВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ I

ПРОВЕРЕНО

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ИЗДАНИЕ ОДИННАДЦАТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования РСФСР
в качестве учебника для государственных
университетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

Фриш Сергей Эдуардович
и Тиморева Александра Васильевна

Курс общей физики, том I
Л., Физматгиз, 1962, стр. 468, с илл.

Редакторы:
Ю. В. Новожилов **и** *Л. И. Орлова*
Техн. редактор *А. А. Лукьянов*
Корректор *Л. А. Любович*

Подписано к печати с матриц 15/I 1962 г.
Бумага 60 × 92[1]/16. Физ. печ. л. 29,25.
Усл. печ. л. 29,25. Уч.-изд. л. 29,84.
Допечатка тиража 100 000 экз.
Цена 1 р. 00 к. Заказ № 1265.

Государственное издательство
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного
хозяйства Управление полиграфической
промышленности. Типография № 1
«Печатный Двор» им. А. М. Горького.
Ленинград, Гатчинская, 26.

◇ ◇

ИСПРАВЛЕНИЕ
НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ

Напечатано: Издание одиннадцатое, стереотипное.
Должно быть: Издание десятое, стереотипное.

Это *университетский* учебник, выдержавший 10 стереотипных изданий при тираже 100 000 экземпляров. Значит, его могли читать до миллиона студентов, усваивающих эти вопросы физики. С него мы и начнем.

Рассмотрим первый фрагмент.

§ 35. Вращение твердого тела. Момент силы и момент инерции. При рассмотрении вращения твердого тела с динамической точки зрения наряду с понятием о силах вводится *понятие о моментах сил* и наряду с понятием о массе — *понятие о моменте инерции.* Для того чтобы выяснить содержание понятий — момент сил и момент инерции, рассмотрим сперва движение одной материальной точки A с массой m, удерживаемой на окружности радиуса r с помощью какой-либо связи (рис. 72). Пусть на точку A действует постоянная по величине сила $\mathbf{f}$. Тогда точка A приобретает постоянное тангенциальное ускорение w_t, определяемое тангенциальной составляющей f_t:

$$f_t = f \cos \alpha = m w_t. \tag{1}$$

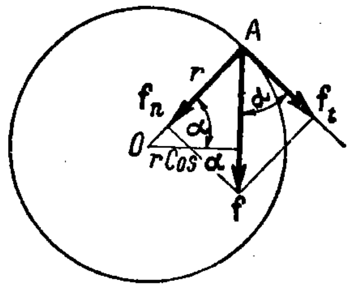


Рис. 72. Вращение точки A по окружности.

Нормальная составляющая силы $\mathbf{f}$ совместно с реакцией связи создает нормальное ускорение.

Введем угловое ускорение $\beta = \frac{w_t}{r}$, тогда равенство (1) заменится выражением:

$$f \cos \alpha = mr \cdot \beta;$$

умножим правую и левую части этого выражения на r, получим:

$$fr \cos \alpha = mr^2 \cdot \beta. \tag{2}$$

Произведение $r \cos \alpha$ равно длине перпендикуляра, опущенного на направление силы из точки O (рис. 72). Величина

$$M = fr \cos \alpha, \tag{3}$$

численно равная произведению величины силы f на длину перпендикуляра, опущенного на направление силы из точки O (центра вращения), называется *моментом силы относительно точки O.*

Величина

$$I = mr^2, \tag{4}$$

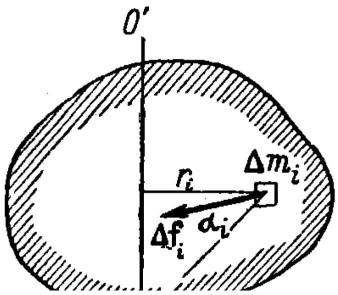
численно равная произведению массы m точки A на квадрат ее расстояния от точки O (центра вращения), называется *моментом инерции точки A относительно точки O.*

Вводя момент силы M и момент инерции I, перепишем равенство (2):

$$M = I\beta. \tag{5}$$

Сравнивая равенства (1) и (5), видим, что угловое ускорение β таким же образом связано с моментом силы M и моментом инерции

I, каким линейное ускорение w_t связано с силой f_t и массой m точки A. При описании вращательного движения с помощью углового ускорения β роль силы играет момент силы M, роль массы m — момент инерции I. Под влиянием сил с равными моментами точка A приобретает равные угловые ускорения β. Таким образом, *различные силы* **f** *эквивалентны в смысле вызываемого ими вращения, если равны их моменты.* Разные материальные точки получают под влиянием равных моментов сил одинаковые угловые ускорения, если одинаковы их моменты инерции. Таким образом, *материальные точки с разными массами* m *эквивалентны в смысле приобретаемого ими углового ускорения, если равны их моменты инерции.*



Здесь необходимо следующее пояснение.

В данном случае сила f и ее тангенциальная составляющая f_t обе *постоянны* по величине, чем определяется тоже *постоянное* тангенциальное ускорение w_t по формуле (1).

При этом угол $\propto$ тоже является постоянным, а значит сила f постоянна по величине, но непостоянна по направлению, т.к. она тоже вращается вместе с самой жесткой связью по окружности с радиусом r. Поэтому угол $\propto$ *не является* углом поворота материальной точки A по окружности (последний на рис. 72 вообще не показан).

Другое пояснение касается выражения «Нормальная составляющая силы f *совместно с реакцией связи* создает нормальное ускорение». На деле же деле нормальная составляющая f_n силы f создает нормальное ускорение w_n, *компенсируемое* реакцией связи $w_{св} = -w_n$, вследствие чего результирующий вектор ускорения $w_{рез} = w_n + w_{св} = w_n - w_n = 0$. Поэтому никакое движение в направлении вектора f_n не происходит.

То есть на рис.72 представлено *равноускоренное круговое* вращение, которое как всякое равноускоренное движение не может быть бесконечным. Такое вращение соответствует *началу* движения до его перехода к равномерному вращению при силе $f = 0$.

Далее, прокомментируем выражение «Введем угловое ускорение $\beta = \frac{w_t}{r}$ ». Ввести-то, конечно, можно, но для чего и что это значит? В чем смысл такого введения? Что означает эта величина, каков ее физический смысл? – Ответ таков. Это необходимо как для сравнения между собой круговых движений различных точек с неодинаковыми радиусами r, так и для сравнения различных круговых движений. В чем здесь проблема? – В круговом движении, в отличие от прямолинейного, пройденный путь S, скорость движения V и ускорение a у разных точек, имеющих разные радиусы вращения r, пропорциональны этим радиусам r. То есть *не сохраняют* постоянства значений $S = k_1 r$, $V = k_2 r$, $a = k_3 r$, где k_1, k_2, k_3 – коэффициенты пропорциональности. Причем эти коэффициенты, за исключением k_1, не просто числовые, т.е. математические, что возможно у разных величин одинакового физического смысла, а *физические*, поскольку члены этих пропорций имеют *разный* физический смысл и неодинаковые размерности.

Поэтому сопоставления для разных точек или разных движений необходимо вести либо при одинаковом значении радиуса r, либо по другим физическим характеристикам, НЕЗАВИСЯЩИМ от него. Такими физическими характеристиками, не зависящими от радиуса r, как раз и являются эти физические коэффициенты пропорциональности k_1, k_2 и k_3.

Они называются соответственно: k_1 – угловое/движение, k_2 – угловая/скорость, k_3 – угловое/ускорение. То есть это физические величины, определяемые по формулам $k_1 = \frac{S}{r}$, $k_2 = \frac{V}{r}$, $k_3 = \frac{a}{r}$. В отличие от S, V и a, они уже *не зависят* от радиуса r и потому могут использоваться для сравнения между собой любых круговых движений и при любых радиусах вращения.

Само же взятие этих отношений $\frac{S}{r}$, $\frac{V}{r}$, $\frac{a}{r}$ называется *приведением* линейных характеристик движения S, V, a к заданному, в данном случае – единичному радиусу вращения r.

В этом и состоит физический смысл введения углового/ускорения $\beta = \frac{w_t}{r}$, никак не объясняемого в приводимом фрагменте.

Далее, вводится величина $M = f_t r$, называемая *моментом силы* относительно точки O. Слово *момент* относится к категории *времени*, поэтому здесь его использование не вполне понятно и требует объяснения. Поскольку M в данном случае величина *постоянная*, независящая от *момента* времени.

Также вводится и другая величина $I = mr^2$, называемая *моментом инерции* точки A относительно точки O. Здесь она тоже является *постоянной* величиной, не зависящей от *момента* времени. Поэтому слово *момент*, используемое в обоих случаях, выглядит непонятным.

И обе эти дополнительные физические величины введены только лишь для того, чтобы получить эту зависимость: $M = I\beta$, где β – угловое ускорение, равное $\beta = \frac{w_t}{r}$, аналогично тому, как сила f в линейном движении связана с массой m ускорением w материальной точки A по второму закону Ньютона ($f = mw$).

Такое изложение *неэвристично*, т.е. не дает представления о ходе мысли, приведшем к введению этих дополнительных характеристик.

Терминология

Сначала рассмотрим сами эти названия.

Момент силы (синонимы: крутящий момент, вращательный момент, вертящий момент, вращающий момент).

Каков физический смысл понятия *момент/силы*? Читатель, ищущий ответ на такой вопрос во всякого рода словарях, технических справочниках или учебниках сразу столкнется в дополнительной трудностью – стремлением этих источников давать ответ предпочтительно *в общем* и даже *наиболее общем виде*, с которым желающему придется долго и утомительно разбираться. А нужно делать ровно наоборот – начать с простейшего пусть частного случая, зато понятного. При этом определение момента/силы окажется довольно простым, даже элементарным: это произведение действующей/силы f_t на *плечо/силы* или *плечо/рычага*. А это что такое – *плечо/силы*? – Здесь тоже довольно просто – это обозначение наименьшего/расстояния от линии/действия/силы до центра или оси/вращения. Сила направлена по прямой, а точка ее приложения может находиться в любом месте этой прямой. Поэтому задается не расстояние от точки приложения силы до центра или оси/вращения, а наименьшее/расстояние от этой прямой. Оно-то и называется плечом/силы или плечом/рычага. Как если бы здесь действительно был рычаг h_1 или h_2, к концу которого приложена сила F Рис. 2.

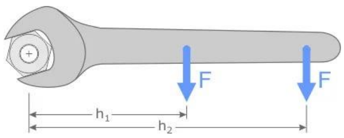


Рис. 2. Плечо/силы или плечо/рычага h_1 или h_2.

На Рис.3 показаны две силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ и соответствующие им плечи/силы или плечи/ рычага I_1, I_2. Это изображение правильное.

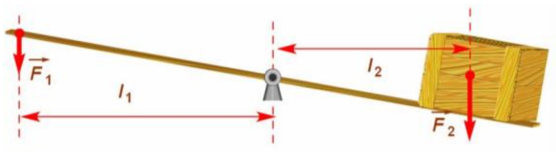


Рис. 3. Плечо/силы или плечо/рычага (правильное изображение)

А на Рис. 4 плечи/силы или плечи/рычага изображены неправильно. Автор рисунка в вопросе не разобрался.

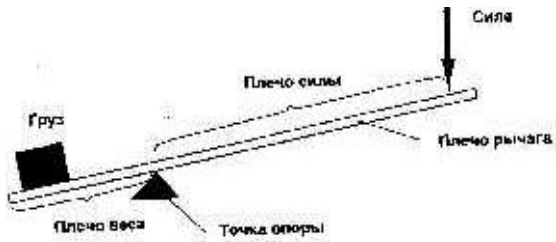


Рис.4. Плечо/силы или плечо/рычага (неправильное изображение)

Итак, на рис. 72 *момент/силы* M есть произведение действующей/силы f_t на *плечо/силы* или плечо/рычага. В данном случае плечо/силы есть просто радиус/вращения r.

То есть $M = f_t r$. С этим понятно.

А теперь главный вопрос: «Зачем это понадобилось?» – А вот зачем.

Но чтобы правильно ответить на этот вопрос, необходимо, прежде всего, дать физическую модель движения, соответствующая этому изложению.

Правильная модель движения.

Вот эта модель Рис. 5.

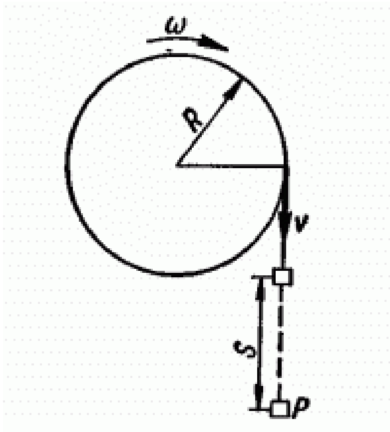


Рис. 5. Модель движения, описываемого в учебнике.

Что здесь показано? – Диск с массой m и радиусом R, приводимый в движение с помощью груза, соединенного с ним посредством накрученной на него нити. Груз движется вертикально вниз под действием силы/тяготения P, приводя этот диск в равноускоренное/вращение. В данном случае сила/тяготения P и является той самой тангенциальной/составляющей f_t, о которой идет речь на рис. 72 учебника. Теперь понятно, почему она является постоянной величиной. Ведь это же просто постоянный вес P груза.

В таком равноускоренном/движении линейная/скорость V пропорциональна линейному/ускорению a и времени t движения: $V = at$, а пройденный путь S удовлетворяет соотношению $S = \frac{at^2}{2}$. Но для вращающегося диска не это главное. А важно то, что, в отличие от поступательного движения, все точки которого имеют *одинаковую* скорость V, линейная/скорость V вращательного/движения у разных точек диска является неодинаковой, т.е. *непостоянной* величиной, пропорциональной радиусу R. В центре/вращения, например, $V = 0$. А одинаковой, не зависящей от радиуса R, т.е. *постоянной* величиной является отношение $\frac{V}{R}$, называемое *угловой/скоростью* ω вращения: $\omega = \frac{V}{R}$. Вот этой-то угловой/ скоростью ω все виды вращения и различаются между собой. А значит, угловая/скорость ω

придумана и введена вовсе не просто так, а для различения или сравнения между собой разных вращений.

А что можно сказать об ускорении a? – В равноускоренном/движении линейное/ ускорение a пропорционально скорости V по формуле $a = \frac{V}{t}$, где t – время/движения. А скорость V у разных точек вращающегося диска, как уже сказано, неодинакова и определяется радиусом R по формуле $a = kR$. Поэтому ускорение $a = \frac{V}{t} = \frac{kR}{t}$. То есть точно так же является непостоянным, определяемым радиусом R. А постоянным для любого радиуса R является отношение $\frac{a}{R}$, называемое *угловым/ускорением* β, то есть $\beta = \frac{a}{R}$.

Введение этого углового/ускорения β, как и угловой/скорости ω не произвольно, а необходимо для описания равноускоренного/вращения для любой точки диска на любом радиусе R вращения.

Итак, для любой точки неравномерного поступательного/движения используются понятия линейной/скорости V и линейного/ускорения a, а для любой точки неравномерного/вращения – угловой/скорости ω и углового/ускорения β.

Формальное описание

Чтобы перейти теперь от тангенциальной/составляющей f_t действующей силы f к моменту/силы M на рис.72 нужно просто умножить эту величину f_t на плечо/силы или плечо/рычага. В данном случае на r. Для чего обе части формулы $f_t = ma = mr\beta$ умножаем на r и получаем: $f_t r = mr^2\beta$.

Или $M = mr^2\beta$. Выражение mr^2 названо моментом/инерции I, т.е. $I = mr^2$. Здесь это постоянная величина. Может быть, лучше бы ее назвать просто *инерцией*? Итого получаем: $M = I\beta$.

В поступательном/движении по второму закону Ньютона $f = ma$, а во вращательном – $M = I\beta$, где сила f_t заменяется моментом/силы M, где $M = f_t r$, масса m – моментом/инерции I, где $I = mr^2$, а линейное/ускорение a – угловым/ускорением β.

Итак, в поступательном/движении сила f равна произведению массы m на ускорение a, а во *вращательном* – момент/силы M равен произведению момента/инерции I на угловое/ускорение β.

Это выражение *второго закона Ньютона* не для поступательного, а для вращательного движения. Для любой его точки вращения.

Действительно, $M = f_t r$, $I = mr^2$, $\beta = \frac{a}{r}$. Подставим эти физические значения в формулу $M = I\beta$. Получим $f_t r = mr^2 \frac{a}{r}$. Или, после сокращения на r, окончательно $f_t = ma$.

Это обычный второй закон Ньютона, всего лишь освобожденный от необычной записи.

Дополнительный комментарий

Теперь, когда мы неожиданно может быть даже для самих себя обнаружили, что перед нами всего лишь другая форма записи того же самого второго закона Ньютона, спросим себя: ну, и зачем все это? – Что нам дает введение новых физических характеристик – момента/силы $M = f_t r$, момента/инерции $I = mr^2$ и даже углового/ускорения $\beta = \frac{a}{r}$?

Что нам мешало до этого? – Зависимость линейной/скорости V и линейного/ускорения a от плеча/рычага r, с которой мы в общем-то и решили побороться? – Введя для этого угловые скорость ω и ускорение β, теперь уже независимые от r? – Прекрасно, но просто так ввести β взамен a НЕЛЬЗЯ, иначе ведь этим нарушится справедливость второго закона Ньютона. Поэтому пришлось одновременно с введением углового ускорения β вводить также и дополнительный множитель r, т.е. $f_t = mr\beta$, поскольку $f_t = mr\frac{a}{r} = ma$. И что, избавились мы теперь от этой самой зависимости от r? – Ничуть, просто умножили числитель и знаменатель на одну и ту же величину r, а равенство при этом осталось ведь тем же самым. Затем ввели дополнительное понятие – момента/силы M. Для этого умножили f_t на то же самое плечо/силы r, а также умножили другую часть равенства на эту же самую величину r. Чтобы получить теперь новое выражение $f_t r = mr^2\beta$. И заменяя в нем всего лишь обозначения, имеем в итоге этих ТОЖДЕСТВЕННЫХ преобразований выражение: $M = I\beta$. Ну, и что в этом нового? – Ведь это тот же самый второй закон Ньютона, но лишь в другой форме записи, то есть в других обозначениях. Обманываем сами себя, делая вид, будто получили какой-то другой, якобы новый результат?

Я уже приводил подобный пример такого же самообмана. Где *одна и та же зависимость* выражается в двух разных формах записи – в виде геометрической теоремы Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ и в формуле тригонометрии $sin^2 \propto +cos^2 \propto = 1$, притом даже искусственно относимых к *разным* наукам, якобы выражающих неодинаковый результат http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/public/YaBB.pl?num=1501411831 .

Скаляры и векторы

Дополнительное различие, крайне затрудняющее понимание, состоит в следующем.

В поступательном движении по второму закону Ньютона действующая сила f может считаться *вектором* $\vec{f}$, направление которого определяется вектором ускорения $\vec{a}$. При этом масса m является просто *скаляром*.

А во вращательном движении всё уже совершенно не так. Здесь вектор линейного/ускорения $\vec{a}$ заменяется вектором углового/ускорения $\vec{\beta}$, направление которого не только не совпадает с направлением вектора силы $\vec{f}$, но и является ему перпендикулярным. Впрочем, что означает *является*? Правильнее сказать – *условились считать* перпендикулярным. А почему это?

Вспомним, как вообще появляется угловое ускорение? – Поскольку разные точки вращения имеют неодинаковое числовое значение линейного/ускорения a, – с целью их приведения к *одинаковому* числовому значению. Подчеркиваем: ЧИСЛОВОМУ значению. А причем здесь направление этого вектора? Математически можно, конечно, задать ему любое направление, однако физически это же вовсе не так. Иначе просто утрачивается физический смысл углового/ускорения β. Который в общем-то тот же самый, что и у линейного ускорения a, кроме его числового значения. И, стало быть, вектор $\vec{\beta}$ вовсе не сам по себе направлен, а его *решено направить* именно так, а не иначе.

И в точности так же момент/инерции I, определяемый зависимостью $I = mr^2$, физически полностью аналогичен массе m второго закона Ньютона для поступательного движения, то есть должен считаться скаляром, а не вектором. Но его тоже почему-то велено считать вектором $\vec{I}$, которому нужно, естественно, придать еще и какое-то направление. А потому сам вектор момента/силы $\vec{M}$ определяется уже не одним вектором углового/ускорения $\vec{\beta}$, а двумя векторами $\vec{I}$ и $\vec{\beta}$, т.е. становится их векторным/произведением. Которому для однозначности нужно придать еще и какое-то направление, совпадающее или не совпадающее с одним из этих двух векторов или ни с одним из них. Решили так – направление вектора момента/силы $\vec{M}$ *перпендикулярно* плоскости, образуемой двумя этими исходными векторами $\vec{I}$ и $\vec{\beta}$. Притом нужно еще дополнительно установить – в какую именно сторону от этой плоскости Рис. 6.

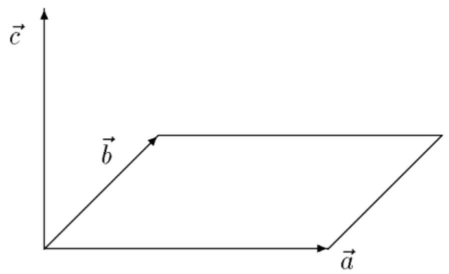


Рис. 1

Рис. 6. Векторное/произведение $\vec{c}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Введя дополнительно *правила/буравчика* для установления этого направления. А если в этом буравчике поменять правую/резьбу на левую, – придется что, изменять целый закон физики? – Не проще ли было изменить само это изложение, отказавшись от векторного/произведения как от излишнего и главное совершенно *ненужного* усложнения?

Словом, возникла целая довольно сложная наука на основе пространственных представлений. С утратой исходного понимания того, что речь здесь идет всего лишь о форме записи второго закона Ньютона применительно к вращательному/движению.

Здесь яркий пример путаницы, внезапно возникшей в самой науке. При невозможности разобраться во всем этом для целых поколений учащихся. А нужно было всего лишь вернуться к исходному *скалярному* пониманию момента/инерции I аналогично скалярному пониманию массы m. Без всяких векторных/произведений, лишь затуманивающих суть вопроса.

Следующий фрагмент.

§ 37. Момент количества движения. Рассмотрим первоначально материальную точку с массой m, вращающуюся по окружности радиуса r (рис. 72). Для такой точки имеет место соотношение:

$$f \cos \alpha = m w_t, \tag{1}$$

где f — сила, действующая на точку, а w_t — тангенциальная составляющая ее ускорения. Предположим, что сила f постоянна по величине и составляет один и тот же угол α с касательной к окружности во всех точках пути.

Тогда $w_t = \Delta v / \Delta t$, и равенство (1) принимает вид:

$$f \cos \alpha \cdot \Delta t = m \, \Delta v.$$

Умножая правую и левую части этого выражения на r, получим

$$fr \cos \alpha \cdot \Delta t = rm \, \Delta v. \tag{2}$$

Величина $fr \cos \alpha$ представляет собой момент M силы f относительно центра вращения O; кроме того, ввиду постоянства массы m и радиуса r, выражение $rm \, \Delta v$ можно переписать в виде $\Delta (rmv)$.

Тогда равенство (2) примет вид:

$$M \, \Delta t = \Delta (rmv). \tag{3}$$

Если момент сил M непостоянен, то в выражении (3) следует брать столь малый промежуток времени Δt, чтобы в течение этого промежутка времени момент сил M мог считаться постоянным. Для конечного промежутка времени можно ввести в рассмотрение среднее значение момента сил $\overline{M}$ и тогда

$$\overline{M} \, \Delta t = \Delta (rmv). \tag{3a}$$

Величина $p = rmv$ называется ***моментом количества движения*** материальной точки, вращающейся по окружности, а $\overline{M} \, \Delta t$ — ***импульсом момента сил.*** Равенство (3) утверждает, что ***изменение момента количества движения численно равно импульсу приложенного момента сил.*** Оно аналогично равенству (4) § 17, выражающему связь между изменением количества движения и импульсом силы.

Здесь выражение $f_t r = mrw_t = mr\frac{\Delta V}{\Delta t}$ сначала приводится к виду $f_t r\Delta t = mr\Delta V$.

Или $M\Delta t = \Delta(mrV)$, поскольку mr является постоянной величиной.

Произведение mrV названо *моментом/количества/движения* p , т.е. $p = mrV$ и соответственно $\Delta p = \Delta(mrV)$ – это его изменение за промежуток времени Δt. Произведение $M\Delta t$ названо *импульсом/момента/силы*. Требуется просто запоминать, что *изменение момента/количества/движения* Δp *численно равно приложенному импульсу/момента/силы* $M\Delta t$.

Зачем все это нужно по-прежнему непонятно.

И наконец, последний, третий фрагмент.

Из формул (3) и (4) следует, что *при отсутствии момента сил* ($M=0$) *момент количества движения остается постоянным.* Это следствие известно под названием *закона сохранения момента количества движения.*

В частном случае движения материальной точки по окружности имеем из (3) при $M=0$:

$$mvr = \text{const}. \tag{5}$$

В общем случае движения материальной точки при $M=0$:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const}. \tag{6}$$

Для твердого тела из (4) при $M=0$ следует:

$$I \cdot \omega = \text{const}. \tag{7}$$

В случае неизменного момента инерции, при отсутствии внешних сил, угловая скорость вращающегося тела остается постоянной; этот результат мы уже получали непосредственно из формулы (6а) § 35.

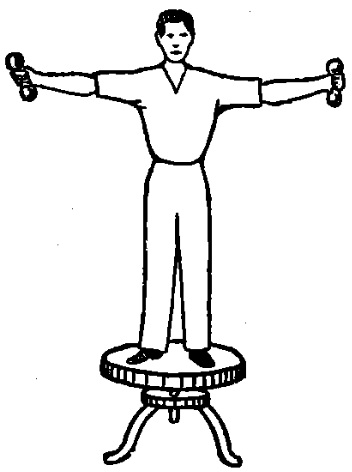


Рис. 81. При опускании рук с гирями человек начинает вращаться скорее.

Если, при отсутствии внешних сил, меняется момент инерции, то начинает меняться и угловая скорость ω, так что произведение $I\omega$ остается постоянным: если момент инерции I возрастает, то угловая скорость ω убывает, и наоборот.

Сохранение момента количества движения может быть продемонстрировано с помощью человека, стоящего на скамеечке, могущей без трения вращаться вокруг вертикальной оси („скамья Жуковского"). Пусть человек, держащий в расставленных руках гири (рис. 81), приведен вместе со скамеечкой во вращение с угловой скоростью ω. При этом человек имеет определенный момент количества движения $I\omega$, который, при равенстве нулю момента внешних сил, должен сохраняться. Если человек опустит руки, то его момент инерции уменьшится, в результате этого возрастет угловая скорость его вращения ω. Если человек снова поднимет руки, то угловая скорость ω примет прежнее значение.

Момент количества движения $\mathbf{P} = I\boldsymbol{\omega}$ есть величина *векторная*, имеющая то же направление, что и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Дополнительный комментарий

Здесь момент/силы $M = f_t r$ может быть равен нулю в том случае, когда сила $f_t = 0$. То есть при равномерном/вращении с постоянной линейной/скоростью V. Удовлетворяющая условию постоянства момента/количества/движения $p = mVr = const$. Откуда $V = \frac{const}{mr} = \frac{const_1}{r}$ – при равномерном вращении тела с массой m его линейная/скорость V обратно пропорциональна радиусу/вращения r.

Это единственное практическое применение вводимых понятий и их обозначений. С увеличением радиуса r скорость V вращения уменьшается и обратно. Что и демонстрируется рис. 81.

Но как при этом можно увеличить или уменьшить радиус r при равномерном вращении с постоянной линейной/скоростью $V = const$? При равенстве центробежной силы $f_{цб}$, определяемой зависимостью $f_{цб} = \frac{mV^2}{r}$ и центростремительной силы $f_{цс}$, определяемой противодействием *связи*? – Ответ – никак, если только искусственно не нарушить равенство $f_{цс} = -f_{цб}$, введя при этом дополнительную силу $\pm\Delta f$. Как ее при этом назвать – *внешней* или *внутренней*, в общем-то, безразлично. В зависимости от направления этой дополнительной силы Δf и времени ее действия, радиус/вращения r и соответственно линейная/скорость V уменьшается или же возрастает.

Рассмотрим подробнее это высказывание.

> **Если, при отсутствии внешних сил, меняется момент инерции, то начинает меняться и угловая скорость ω, так что произведение $I\omega$ остается постоянным: если момент инерции I возрастает, то угловая скорость ω убывает, и наоборот.**

Сказано слишком коротко и потому непонятно.

Какая вообще связь внешней силы f_t с моментом инерции I? Будет ли внешняя сила f_t больше нуля $f_t > 0$, меньше нуля $f_t < 0$ или равна нулю $f_t = 0$, из определения $I = mr^2$ такое различие не вытекает. Также непонятно, какая из имеющихся иллюстраций подразумевается. Исходный рис. 72 выглядит *вертикальным* вращением. Нами предложен Рис. 5 с таким же вертикальным вращением, полностью соответствующим рис. 72. Однако на рис.81 показано теперь уже горизонтальное вращение. Что уже требует некоторого пояснения.

Далее, в чем состоит разница *внешних* и *внутренних* сил, и что это такое вообще? И как может изменяться момент инерции *в отсутствие сил*? На рис. 81 изменение момента инерции ведь очевидно сопровождается приложением сил. Пускай и названных *внутренними*.

Словом, перед нами псевдообъяснение. Возможно, оно понятно тому, кто знает это лучше самого объясняющего. А изучающему это впервые определенно понадобятся пояснения.

Изложим это еще раз своими словами.

Полагаю, Рис. 5 может соответствовать требованию отсутствия внешних сил, если на нем мысленно обрезать нить. Но лучше все же предложить другую схему вращения, ближе к рис.81.

Возьмем для этого плоский диск с массой M с возможностью свободного его вращения относительно вертикальной оси. Поверх этого диска поместим спицу с надетой на нее гайкой, с возможностью совместного или независимого ее вращения относительно той же самой вертикальной оси. Масса гайки m должна быть много меньше массы M плоского диска $m << M$, а масса спицы m_1 свою очередь много меньше массы m гайки $m_1 << m$. Зачем это нужно, поясним в ходе дальнейшего изложения. Гайка может закрепляться на этой спице или свободно перемещаться относительно нее. Вначале жестко свяжем вращение спицы с закрепленной на ней гайкой с вращением самого диска. Приведем этот диск в равномерное вращение с угловой/скоростью ω. Спица вместе с закреплённой ней гайкой при этом тоже приобретет угловую/скорость ω. При равномерном вращении диска вместе со спицей на гайку действуют две уравновешивающие друг друга силы – центробежная/сила $f_{цб}$, определяемая по формуле $f_{цб} = ma_{цб} = m\frac{V^2}{r}$, где $a_{цб}$ – центробежное/ускорение, V – линейная/скорость вращения гайки, r – ее радиус/вращения, и равная ей по величине и противоположная по направлению центростремительная/сила $f_{цс}$, определяемая как $f_{цс} = -f_{цб}$, называемая *реакцией связи*. При этом совместная угловая/скорость диска, спицы и гайки составляет $\omega = \frac{V}{r}$.

Введем теперь первое изменение.

Прервем жесткую связь гайки со спицей, обеспечив возможность свободного ее перемещения относительно спицы. При этом центробежная/сила $f_{цб}$, определяемая линейной/скоростью V движения гайки и ее радиусом/вращения r полностью сохранится, а центростремительная/сила $f_{цс}$ после устранения связи гайки со спицей тотчас исчезнет $f_{цс} = 0$. Под действием единственной оставшейся силы $f_{цб}$ гайка придет в ускоренное движение вдоль спицы в направлении увеличения радиуса/вращения r. При сохранении угловой/скорости $\omega = const$ ее вращения, определяемой диском и спицей, линейная скорость V вследствие увеличения радиуса/вращения r будет непрерывно возрастать $V = \omega r = (const) \cdot r$. То есть движение по касательной к траектории кругового вращения становится теперь уже не равномерным, а ускоренным. С ускорением $a_к$, вызываемым силой $f_к$, направление которой определяется направлением линейной/скорости V. Эта сила $f_к$ называется *силой/Кориолиса*.

Обычно ее объясняют на примере речного течения, направленного по земному меридиану, в Северном полушарии – с севера на юг (а в южном – наоборот). Вода речного течения при этом тоже ускоренно движется вследствие земного вращения, создающего центробежную силу $f_{цб}$ речного течения даже на равнинной местности, называемой также *эквипотенциальной поверхностью*, и вместе с ней также и силу/Кориолиса $f_к$ действующую на это речное течение в направлении с Запада на Восток. Само же речное течение по третьему закону Ньютона в свою очередь создает силу/противодействия $f_{пр}$, равную по величине и противоположную по направлению силе/Кориолиса $f_к$, то есть $f_{пр} = -f_к$. При этом, ввиду неравенства масс – текущей речной воды m и массы Земли M, где $m \ll M$, сила/противодействия $f_{пр}$ речного течения не может изменить угловую/скорость $\omega_З$ вращения Земли и может только лишь подмывать правый берег реки с постепенным ее смещением с Востока на Запад, если это позволяют условия равнинной местности.

И точно так же в рассматриваемой нами модели вращения, где масса гайки m по определению много меньше массы M вращающегося диска $m \ll M$, движение гайки вдоль спицы, сопровождаемое увеличением ее линейной скорости V за счет воздействия силы/ Кориолиса $f_к$, не изменяет собственной силой/противодействия $f_{пр} = -f_к$ угловую скорость вращения ω диска со спицей $\omega = const$.

Введем теперь второе изменение.

Прервем связь спицы с вращающимся диском с возможностью свободного ее вращения относительно вертикальной оси. При этом сразу же исчезнет и сила/Кориолиса $f_к = 0$, создаваемая вращающимся диском перпендикулярно спице. В отсутствие силы/Кориолиса $f_к = 0$ при движении гайки вдоль спицы под действием центробежной/силы $f_{цб}$ линейная/скорость V движения более не изменяется $V = const$, хотя ее радиус/вращения r по-прежнему возрастает.

Значит угловая/скорость ω вращения спицы с гайкой становится равной $\omega = \frac{V}{r} = \frac{const}{r}$, то есть обратно пропорциональной радиусу/вращения r . При возрастании радиуса/вращения r гайка препятствует вращению спицы, оказывая на нее силу торможения $f_т$. Спица в свою очередь оказывает на гайку силу/противодействия $f_{пр}$, соответствующую силе/Кориолиса. Однако, ввиду заведомого неравенства масс гайки m и спицы m_1 ($m_1 << m$) это ее противодействие не изменяет угловую/скорость ω, также как и речное течение не изменяет земное вращение.

Введем третье и последнее изменение.

Представим на конце спицы, куда теперь движется гайка площадку с пружиной, куда она может удариться в режиме упругого столкновения. Приобретя при этом скорость/движения V_2 вдоль спицы равную по величине и противоположную по направлению скорости V_1 до начала упругого столкновения $V_2 = - V_1$. Гайка при этом начнет двигаться вдоль спицы в обратном направлении, причем угловая/ скорость ω ее вращения вместе со спицей в силу сохранения той же самой зависимости $\omega = \frac{const}{r}$ теперь уже будет не уменьшаться, а увеличиваться. До ее сближения с осью вращения, где тоже может быть установлена такая же площадка с пружиной. При этих прямых и обратных перемещениях гайки возникнет неравномерное круговое вращение спицы при возрастании или уменьшении ее угловой/скорости ω, подобное колебаниям линейного маятника. Практически, конечно, затухающее из-за наличия сопротивления трения. Вот что подразумевает окончание фразы «*угловая скорость ω убывает и наоборот*» в выделенном нами фрагменте текста учебника.

Дополнительный комментарий

Посмотрим теперь иллюстрацию этой зависимости на рис. 81. Здесь масса M самого человека много больше масс m каждой его руки. Она находится на вертикальной оси вращения, т.е. имеет малую линейную/скорость V. Центры масс m каждой руки расположены примерно посередине, т.е. в районе локтя. Это их максимально возможное удаление от оси вращения. При сгибании рук в локте центр масс каждой руки удаляется от центра вращения на четверть ее длины, а при их опускании удаление становится минимальным. Этим имитируется движение гайки по спице с возможностью изменения угловой скорости ω вращения. Однако такое сгибание и разгибание рук и их поднятие или опускание требует рассмотрения дополнительных действующих сил, лишь затемняющих понимание происходящего. Также для усиления эффекта в обе руки берутся гантели, дополнительно отодвигающие центры масс вытянутых рук от центра вращения.

В целом, мне кажется, более подробное рассмотрение этого неравномерного вращения дает много лучшее его понимание. Где уже практически не понадобились дополнительные физические характеристики.

Неравноускоренное вращение.

Вернемся теперь к рис. 72 и рассмотрим возможность неравноускоренного вращения под действием силы, постоянной как по величине, так и по направлению.

Сопоставим рис. 72 с другим рисунком того же учебника, иллюстрирующим совсем другое движение – колебания маятника рис. 242, даваемое уже в совершенно другом разделе физики. Выделяем отдельно оба эти рисунка.

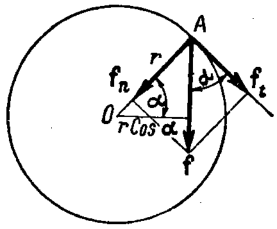


Рис. 72. Вращение точки A по окружности.

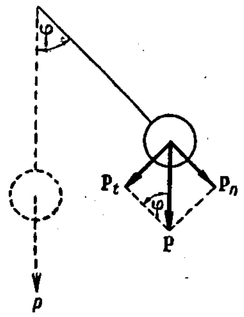


Рис. 242. Колебания маятника.

На рис. 242 показано колебания маятника под действием силы тяжести P.

Чем отличаются друг от друга сравниваемые движения? – Тем, что на рис. 72 действующая сила f имеет непостоянное направление и вращается вместе с самим вращающимся диском. А на рис. 242 это не так. Здесь действующая сила P постоянна как по величине, так и по направлению, а изменяется только ее тангенциальная составляющая P_t .

Если то же самое будет происходить на рис. 72, то оба эти движения станут просто неразличимы. Если не считать несущественные отличия в части обозначений.

Взамен силы f и ее проекций f_n и f_t, а также угла $\propto$, показанных на рис.72, на рис.242 даны другие обозначения – сила тяжести P и ее проекции $P_n, P_t,$ а также угол $\varphi = 90^0 - \propto$. Но эти незначительные отличия совершенно не принципиальны. Здесь то же самое неравноускоренное вращение под действием тангенциальной составляющей P_t силы тяжести P.

Но есть и другое теперь уже *принципиальное* отличие. Оно касается действующих сил f_n и P_n. Как можно видеть, эти по-разному обозначаемые проекции имеют *противоположные* направления, причем никакого перемещения под действием этих проекций в обоих случаях не происходит. Для маятника рис. 242 его отсутствию дается такое словесное объяснение – силе P_n противодействует равная ей по величине и противоположная по направлению сила/реакции $F = -P_n$ связи, вследствие чего их векторная сумма в направлении радиуса маятника равна нулю. Поэтому движение в указанном направлении отсутствует, а сама эта сила F противодействия на этом рисунке не изображается. Проекция же P_t противодействующей силы не имеет, поэтому в ее направлении движение происходит.

На рис. 72 точно такая же ситуация и в направлении действия проекции силы f_n движения не происходит. Так как ему в этом тоже препятствует сила противодействия $F = -f_n$ связи, равная по величине и противоположная по направлению.

При равномерном вращении эти реально действующие силы называются одна – *центростремительной*, другая – *центробежной*, причем их величины равны, а направления противоположны, поэтому их векторная сумма постоянно равна нулю http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8713.html .

А в случае же неравномерного движения, показанное на рис. 72, как и в случае маятника на рис. 242 , движение в направлении радиуса r тоже не происходит, так как ему препятствует точно такая же реакция $F = -f_n$ связи, равная по величине и противоположная по направлению.

Итак, оба рисунка 72 и 242 фактически не полны, т.к. на них не изображены противодействующие силы реакции связи, направленные противоположно проекциям f_n и P_n. Словесно об этом говорится, но в памяти может и не зафиксироваться.

Полнота и неполнота описания

Зададимся теперь таким вопросом: является ли описание движения маятника, показанного на рис. 242 полным? Очевидно, что нет, поскольку здесь нет начального положения, соответствующего одновременно значениям $f_t = 0$ и линейной скорости $V = 0$. В крайнем нижнем положении маятника $f_t = 0$, однако $V = V_{max}$, а в промежуточных положениях обе они не равны нулю, за исключением одной единственной точки – крайнем верхнем положении, для случая маятника обычно не изображаемого. Именно в ней оба эти значения равны нулю $f_t = 0$, $V = 0$, что соответствует началу движения.

Итак, в неравноускоренном вращении, показанном на рис. 72, *при условии постоянного направления* силы f, действует переменная сила f_t.

В начальном положении $\propto = 90^0$ значение $f_t = 0$, линейная скорость V_t кругового движения тоже равна нулю $V_t = 0$. Затем сила f_t постепенно возрастает по формуле $f_t = f cos \propto$, где прилагаемая сила f является постоянной величиной, соответствующей весу P на рис. 242, и достигает максимального значения $f_t = f$ при угле $\propto = 0$. Ускорение a_t в направлении кругового движения в силу $f_t = ma_t$ тоже соответственно максимально $a_t = max$. Затем сила f_t вместе с ускорением a_t постепенно уменьшаются по той же формуле $f_t = f cos \propto = ma_t cos \propto$ и обращается в ноль при угле $\propto = -90^0$. При этом скорость $V_t = max$. После чего весь этот процесс повторяется в обратной последовательности.

И что здесь еще важно? – В этом неравноускоренном вращении сила f_t, линейная/ скорость V_t и линейное/ускорение a_t непрерывно изменяются, не сохраняя постоянства значений. Возможно поэтому вводимые дополнительные характеристики (кроме момента/инерции I) именуются *моментами*, имеющими определенные числовые значения лишь в *данный момент* времени, а затем изменяющиеся. Можно было бы точно так же говорить о *моментальной* силе f_t, *моментальной* скорости V_t и *моментальном* ускорении a_t, но их принято называть просто *переменными* величинами.

На рис. 242 также отсутствует момент начала неравномерного движения, когда действующая сила f_t и его линейная/скорость V равны нулю $f_t = 0$, $V = 0$. В нижнем положении маятника сила f_t равна нулю, но это не начало движения, поскольку при этом его линейная/скорость V движения максимальна $V = V_{max}$, а не равна нулю $V = 0$, чтобы соответствовать началу движения. Где же находится это начало неравномерного движения? – В крайнем верхнем положении, противоположном крайнему нижнему, при котором действующая сила P_t тоже равна нулю $P_t = 0$.

А чтобы поместить тело маятника в это начальное положение нужно приложить силу и выполнить некоторую работу.

Такое начальное положение неустойчиво. Малейшее смещение $\pm\Delta\varphi$ приводит к началу неравноускоренного движения в ту или другую сторону. В одном случае получаем реверсивное колебательное движение, в другом – неравноускоренное круговое вращение.

Неравноускоренное вращение

Где вообще нам встречается вращение с переменным ускорением? – В начале движения, когда, например, колеса автомобиля, бывшие до того неподвижными, приходят во вращательное движение, увеличивая линейную/скорость V вращения, до максимальных значений. После чего оно превращается в равномерное с линейным/ускорением $a = 0$ и $V = const$. Или при торможении, когда происходит обратный процесс замедления вращения в предельном значении до нуля $V = 0$. В обоих случаях процесс неравномерного вращения *конечен*. Можно и непрерывными переключениями пускать его рывками вперед-назад, как это делается в автомобильных пробках.

Может ли неравноускоренное вращение быть непрерывным?

И наконец, последний важный вопрос: может ли неравноускоренное вращение быть непрерывным? То есть самостоятельно осуществляться без всякого внешнего управления? – Ответ такой – да, может.

Вот несколько практических примеров такого вращения Рис. 7 – 10 .

Рис. 7. Здесь на руках крутят «солнышко»

Рис. 8. А здесь качели с переворотом.

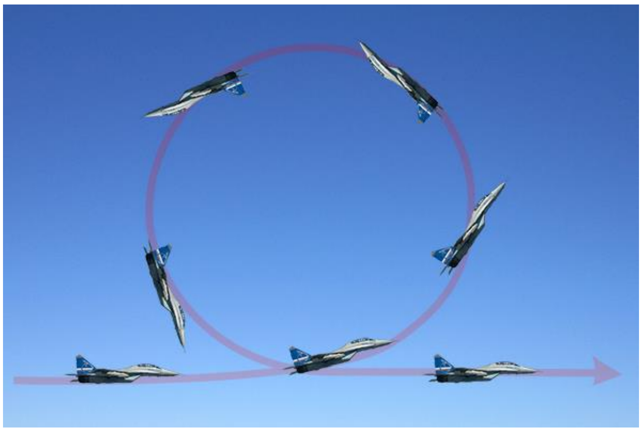


Рис. 9. На самолете («мертвая петля» Нестерова)

Рис. 10.   И наконец просто бегом.

Вот запись непрерывного вращения с переменными линейной/скоростью V линейным/ ускорением a в спортивном силовом упражнении, называемом вращением «солнышка», Рис. 11.

Рис. 11. Спортивное силовое упражнение «солнышко».

Его именно «крутят», т.е. это *круговое* движение. И при этом *неравноускоренное*. В верхнем положении движение замирает (линейная скорость вращения обращается в ноль), затем оно ускоряется и в нижнем положении линейная скорость вращения становится максимальной Рис. 12.

Рис. 12. В верхнем положении движение замирает, затем оно ускоряется

То же самое происходит и в колебательном маятнике. За исключением того, что показанная на рис. 242 угловая амплитуда колебания маятника не достигает 180^0. В верхней точке кругового движения при угловой амплитуде $\propto_{max}= 180^0$ маятник замирает в состоянии неустойчивого равновесия. При этом линейная/скорость V кругового движения и действующая на него сила f в направлении этой линейной скорости обе равны нулю, но при незначительном угловом отклонении $\Delta\propto$ (положительном или отрицательном), маятник приходит в ускоренное движение *вперед* или *назад*. Движение назад соответствует колебанию маятника с угловой амплитудой 180^0, движение же вперед означает переход от колебательного движения к неравноускоренному круговому вращению.

И в заключение.

Неравноускоренное круговое вращение на Рис. 7 – 12 полностью соответствует колебательному движению с амплитудой колебания $\propto_{max}= 180^0$ *без реверса направления* движения рис. 242. Дополнительные физические характеристики при этом вовсе не обязательны.

Описание вращения в классической физике (Description of rotation in classical physics)

Сомсиков Александр Иванович (Aleksandr Ivanovich Somsikov)

Аннотация. Выполнено сопоставление прямолинейного и вращательного движений и их описаний. Приложен перевод статьи с русского языка на английский.

Abstract. Linear and rotational motion are compared and described. Attached is the translation of the article from Russian into English.

Linear motion and rotational motion

Linear motion can be uniform or non-uniform, characterised by the distance travelled S , the velocity V and the acceleration a. Each of these physical quantities can be considered a vector $\vec{S}$, $\vec{V}$, $\vec{a}$, the directions of vectors $\vec{S}$ and $\vec{V}$ being the same, and the directions of vectors $\vec{V}$ and $\vec{a}$ may or may not coincide when motion is accelerated or decelerated.

In circular rotation it is basically the same, but with one essential difference: each of these three physical quantities is proportional to the radius of rotation r, i.e. it is a non-constant quantity at different points of circular rotation, in contrast to linear motions. Therefore, in addition to the original concepts (travelled distance S, velocity V and acceleration a), referred to as *linear*, additional physical characteristics are introduced: angular rotation $\propto$, angular velocity ω and angular acceleration β.

Applied names

Each concept in physics has a very specific meaning. Not all of them have their own names, some may be described by two or more words used together as names.

For better understanding, we will write these verbal notations together, separating them with a slash: linear/displacement S , linear/velocity V , linear/acceleration a and respectively angular/displacement $\propto$, angular/velocity ω, angular/acceleration β. The joined-up spelling means that here the two words express ONE concept.

How do they differ from the corresponding *linear* characteristics?

Angular velocity of rotation

Let's take a look at the definition given in a physics handbook**.**

'The angular velocity of rotation of a solid body is a vector ω numerically equal to the first derivative of the angle of rotation in time ω=dφ/dt and directed along the axis of rotation so that from its end the rotation of the body is seen to occur counterclockwise. The direction of the vector ω coincides with the direction of translational motion of the borax, the handle of which rotates with the body.'
Source: B. M. Yavorsky, A. A. Detlaf, Handbook of Physics for Engineers and Students

Generally, there is no complaint about this rather complicated definition. The authors of the handbook have faithfully repeated what is written in all physics textbooks and what readers should seem to understand. Or should they not? A vector means a direction, but of what and where?

If it is a movement, then, naturally, it is its direction. There is more than one characteristic of movement. It can be the movement itself, but also its velocity and acceleration. But first of all, let's look at the physical meaning of the angular/velocity.

Let us show it by analogy.

Mass and density of bodies

Newton defined mass m as the product of the density of a body p by its volume V. Physics textbooks report that this definition of mass m is incorrect, although they do not explain why exactly. The ratio is of course correct, but as a definition of mass it is really unsuitable, because it immediately raises the following question: What does DENSITY mean? A quantity defined by mass? In science, it is called a *vicious circle*, where A is defined by B, and B is in turn defined by A. The vicious circle is closed.

In fact, the concept of mass is defined by two laws of physics: the law of universal gravitation $f = \gamma \frac{mM}{r^2}$ and Newton's second law $f = ma$ meaning that $\gamma \frac{mM}{r^2} = ma$ or $M = \frac{1}{\gamma} ar^2$, where M is the mass of body 1, a is the acceleration gained by body 2, r is the distance between bodies and γ is a dimensional factor which has no physical meaning and appears due to an arbitrary choice of mass unit. Its designation by the Greek letter gamma, γ, is just an abbreviation of the word γravitation.

Therefore, *the mass m_1 of body 1 is the product of the acceleration a_2 gained by body 2 placed at a distance r from it by the square of this distance (taking into account the dimensional coefficient γ determined by the randomness of the choice of the unit of mass):* http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8715.html.

This definition raises the following question: can mass m_1 счbe considered as a *vector*? Basically, yes, if the acceleration vector $\overrightarrow{a_2}$ is considered, but the direction of this vector is *centered* relative to body 1 and varies depending on the position of body 2 on the spherical surface surrounding body 1 with radius r. Mass acts in all directions at once, without singling out any particular direction, so it should not be considered a vector, i.e. it is a scalar.

As Newton correctly pointed out, the mass of a body m is *proportional* to its volume V, i.e. $m = kV$, where k is the coefficient of proportionality linking *different* physical quantities and therefore has its own dimension. This coefficient k is called the DENSITY of the body. The introduction of the concept of density was needed to compare the masses m_1, m_2 of different bodies 1, 2, given that the mass m of each body is proportional to its volume V. Is it possible to get rid of this dependence? Physically, no, but you can get around it by using the same volume $V_1 = V_2$ when comparing masses m_1, m_2.

Converting to the desired form

But it is still possible to bring their really unequal volumes $V_1 \neq V_2$ to conditionally identical value, e.g. one by dividing the quantities m_1, m_2 by the respective volumes V_1, V_2 to obtain the relations $\frac{m_1}{V_1}$ and $\frac{m_2}{V_2}$.

This is called a reduction of physical quantities to the desired form.

It is these resulting relations that are called *densities* of bodies 1, 2, now independent of volumes V_1 and V_2, so that they can be compared with each other instead of comparing the masses m_1, m_2. Therefore, we are comparing not the masses m_1, m_2 of bodies 1, 2, but their densities $k_1 = \frac{m_1}{V_1}$ and $k_2 = \frac{m_2}{V_2}$.

Linear and angular characteristics

When comparing different rotations with each other, exactly the same is done. Their linear velocities V and accelerations a are proportional to the radius r of rotation $V = k_1 r$, $a = k_2 r$, where k_1, k_2 are coefficients of proportionality having dimension due to difference of physical quantities V, a and r, so they can be compared with each other only at the same radius r.

Or after reduction to a unit radius of rotation by dividing by it to obtain ANOTHER PHYSICAL QUANTITY having a different physical dimension. This understanding is somewhat hampered by the use of the *same* names: velocity and acceleration, albeit *angular* instead of *linear*.

According to the rules of Russian language, the name expressed by two words, one of which is a noun and another is an adjective, means that one of them, namely the noun is the main, i.e. *essential*, and the other is an explanatory or secondary. It turns out for native speakers of Russian that velocity and acceleration remain what they were, only with some specification, while in fact they are absolutely other physical quantities, like mass and density.

Angular/velocity is not linear/velocity, and angular/acceleration is not linear/acceleration, but OTHER PHYSICAL QUANTITIES with similar names and a completely different physical meaning, because they, unlike linear velocity and acceleration, DO NOT DEPEND on radius of rotation.

The introduction of angular quantities of motion, velocity and acceleration, now make it possible to compare different rotations with each other, regardless of their radii of rotation.

Vectors of angular quantities

What are the other differences between the rotations apart from angular physical quantities? Like all motion, they differ in direction and in the coincidence or non-coincidence of the directions of velocity and acceleration. If these directions are the same, then the rotation is accelerating, and if they are opposite, then it is slowing down. So, in order to compare them correctly, the directions must also be taken into account. How is this done? Here is an image taken from the Internet (Fig. 1).

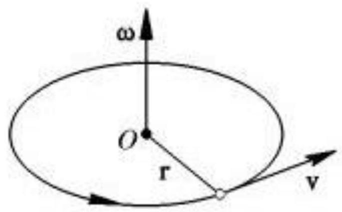


Fig. 1. Vector representation of angular and linear velocities of rotation

Here we see a circular rotation in the direction of the vector of linear/velocity $\vec{V}$, the magnitude of which, as already stated, is proportional to the radius of rotation r. The angular/velocity of the same rotation is also added, numerically defined as the ratio $\omega = \frac{V}{r}$. We already know why a physical quantity ω is needed – to reduce the linear/velocity V to a unit radius of rotation r, obtained by dividing V by r. The resulting value of angular/velocity ω is independent of the radius of rotation r, i.e. it is the same for any radius. So it can be used both to compare different points in the same motion at different radii of rotation r_1, r_2 and to compare different motions with unequal values of angular velocities ω_1, ω_2.

What else can be said about the vector understanding of $\vec{V}$ and $\vec{\omega}$? Which direction can we be talking about here exactly? It is all clear with the vector $\vec{V}$, it indicates the *actual* direction of rotation of the point in exactly the same way as in linear motion. But what does vector $\vec{\omega}$ mean? Fig. 1 shows the dimensions of the vectors $\vec{V}$ and $\vec{\omega}$ as well as the dimension of the radius r are close in value. This generally makes it difficult to understand that the value of vector $\vec{\omega}$ is in fact $\frac{V}{r}$, i.e. first of all numerically different from the value of vector $\vec{V}$. And it is no longer clear what the direction of the vector $\vec{\omega}$ shown in Fig. 1 means and why it is chosen that way? What does it point to? If to some direction, then what exactly? The actual motion is directed quite differently, after all. It is not clear. In addition, there is also a rather complicated rule of how to go from this ARBITRARILY SET vector $\vec{\omega}$ direction to the *actual* direction of the rotary motion.

The so-called right-hand rule of directing the rotary movement in the direction of the vector $\vec{\omega}$, when the rotation of the fingers will show the true direction of the circular motion. That is, we first DEVIATE from the correct direction of the rotational motion to the arbitrarily chosen direction of the vector $\vec{\omega}$ in order to then, using this also artificial rule, return back to the correct direction of rotation. What if you accidentally or deliberately change your hand from right to left? You have to keep that in mind, too, so that you don't get everything mixed up. So why all this artificial piling up of complications? Physically the direction of the vector $\vec{\omega}$ is the same as the vector $\vec{V}$, from which it is obtained. The difference lies only in their dimensions, not in their direction, which, by the way, is not actually visible in Fig. 1.

Explanation for the choice of direction of the angular vectors

Only one reasonable explanation can be given for all this. The choice of the direction of the vector $\vec{\omega}$ is explained by the unwillingness to complicate the picture with two vectors $\vec{V}$ and $\vec{\omega}$ when their directions coincide and similarly with two vectors of linear and angular accelerations also when their directions coincide. It was therefore decided to separate them *visually* by directing the angular vectors along the coordinate axis perpendicular to the rotation plane with the LOSS of understanding of the *physical meaning* of these angular vectors and complicating the inverse transition from their arbitrarily chosen direction to the actual rotation.

But it must be remembered that none of this is PHYSICALLY necessary, and these conventional directions, set up ostensibly for greater clarity, do not clarify but rather complicate and even confuse this, in general, rather simple question.

Uniform rotation

In uniform rotation, as well as in uniform linear motion, representing a particular case of *inertial circular* motion at radius of curvature $R \to \infty$

(http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8444.html), acceleration a is zero everywhere, since the linear velocity of rotation V is constant in magnitude $V = const$, though not constant in direction, and the resulting centrifugal acceleration $a_{цб}$ is strictly balanced by the centripetal acceleration $a_{цс} = -a_{цб}$ created by the gravitational force f or the constraint force directed towards the centre of rotation (http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8713.html).

Non-uniform rotation

Let us now consider another case, non-uniform rotation. The linear and angular accelerations in such motion are not equal to zero.

In non-uniform rotation, additional physical characteristics are introduced in addition to the characteristics of uniform rotation: *moment of force, moment of inertia, angular momentum.*

Let's look at how this is presented in physics textbooks. Let's use a textbook which I used to study myself.

С. Э. ФРИШ и А. В. ТИМОРЕВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ I

ПРОВЕРЕНО

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ИЗДАНИЕ ОДИННАДЦАТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования РСФСР
в качестве учебника для государственных
университетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1962

S. E. Frisch and A. V. Timoreva

General Physics
Volume I
Physical Fundamentals of Mechanics
Molecular Physics
Oscillations and Waves

Edition 11, stereotyped

Approved by the Ministry of Higher and Secondary Vocational Education of the RSFSR as a textbook for the state universities

State Publishing House of Physical and Mathematical Literature
Moscow, 1962

Фриш Сергей Эдуардович
и Тиморева Александра Васильевна
Курс общей физики, том I
Л., Физматгиз, 1962, стр. 468, с илл.
Редакторы:
Ю. В. Новожилов и Л. И. Орлова
Техн. редактор *А. А. Лукьянов*
Корректор *Л. А. Любович*

Подписано к печати с матриц 15/I 1962 г.
Бумага 60 × 92$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 29,25.
Усл. печ. л. 29,25. Уч.-изд. л. 29,84.
Допечатка тиража 100 000 экз.
Цена 1 р. 00 к. Заказ № 1265.

Государственное издательство
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного
хозяйства Управление полиграфической
промышленности. Типография № 1
«Печатный Двор» им. А. М. Горького.
Ленинград, Гатчинская, 26.

◇ ◇

ИСПРАВЛЕНИЕ
НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ

Напечатано: Издание одиннадцатое, стереотипное.
Должно быть: Издание десятое, стереотипное.

Sergey Eduardovich Frish and Aleksandra Vasilievna Timoreva
General Physics, vol. I
Leningrad, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1962, p. 468, illustrated
Editors:
Y. V. Novozhilov and L. I. Orlova
Technical editor: A. A. Lukianov
Corrector: L. A. Lyubovich

Signed off on 15/I 1962
Paper 60 x 92 1/16. Physical printed page 29,25.
Conditional printed page 29,25. Publication printed page 29.84.
Re-print: 100,000 copies
Price: 1.00. Order No. 1265

State Publishing House of Physical and Mathematical Literature
Moscow, V-71, Leninsky Pr. 15

Leningrad Council of National Economy
Department of the Printing Industry. Printing house No. 1
Pechatny Dvor named after Gorky
Leningrad, Gatchinskaya 26

CORRECTION ON THE TITLE PAGE
Printed: Edition 11, stereotyped
Replace with: Edition 10, stereotyped

It is a *university* textbook that has survived 10 stereotypical editions with a circulation of 100,000 copies, which means it could be read by up to a million students learning these physics issues. This is where we begin.

Let's look at the first fragment.

§ 35. Вращение твердого тела. Момент силы и момент инерции. При рассмотрении вращения твердого тела с динамической точки зрения наряду с понятием о силах вводится *понятие о моментах сил* и наряду с понятием о массе — *понятие о моменте инерции.* Для того чтобы выяснить содержание понятий — момент сил и момент инерции, рассмотрим сперва движение одной материальной точки A с массой m, удерживаемой на окружности радиуса r с помощью какой-либо связи (рис. 72). Пусть на точку A действует постоянная по величине сила **f**. Тогда точка A приобретает постоянное тангенциальное ускорение w_t, определяемое тангенциальной составляющей f_t:

$$f_t = f \cos \alpha = m w_t. \qquad (1)$$

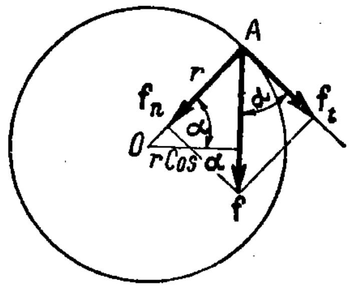


Рис. 72. Вращение точки A по окружности.

Нормальная составляющая силы **f** совместно с реакцией связи создает нормальное ускорение.

Введем угловое ускорение $\beta = \frac{w_t}{r}$, тогда равенство (1) заменится выражением:

$$f \cos \alpha = mr \cdot \beta;$$

умножим правую и левую части этого выражения на r, получим:

$$fr \cos \alpha = mr^2 \cdot \beta. \qquad (2)$$

Произведение $r \cos \alpha$ равно длине перпендикуляра, опущенного на направление силы из точки O (рис. 72). Величина

$$M = fr \cos \alpha, \qquad (3)$$

численно равная произведению величины силы f на длину перпендикуляра, опущенного на направление силы из точки O (центра вращения), называется *моментом силы относительно точки O.*

Величина

$$I = mr^2, \qquad (4)$$

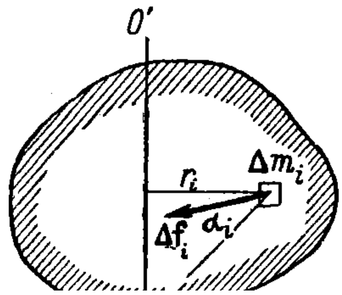
численно равная произведению массы m точки A на квадрат ее расстояния от точки O (центра вращения), называется *моментом инерции точки A относительно точки O.*

Вводя момент силы M и момент инерции I, перепишем равенство (2):

$$M = I\beta. \qquad (5)$$

Сравнивая равенства (1) и (5), видим, что угловое ускорение β таким же образом связано с моментом силы M и моментом инерции

I, каким линейное ускорение w_t связано с силой f_t и массой m точки A. При описании вращательного движения с помощью углового ускорения β роль силы играет момент силы M, роль массы m — момент инерции I. Под влиянием сил с равными моментами точка A приобретает равные угловые ускорения β. Таким образом, *различные силы* **f** *эквивалентны в смысле вызываемого ими вращения, если равны их моменты.* Разные материальные точки получают под влиянием равных моментов сил одинаковые угловые ускорения, если одинаковы их моменты инерции. Таким образом, *материальные точки с разными массами m эквивалентны в смысле приобретаемого ими углового ускорения, если равны их моменты инерции.*



§ 35. Rotation of a solid body. Moment of force and moment of inertia.

When considering the rotation of a solid from the dynamic point of view, we introduce the concept of moments of force alongside the concept of forces and the concept of a moment of inertia alongside the concept of mass. To clarify the moment of force and moment of inertia, let us first consider the motion of one material point A with mass m, held on a circle of radius r with the help of some kind of constraint (Fig. 72).

Fig. 72. Rotation of point A on a circle

Let point A be subjected to a force f of constant magnitude. Then point A acquires a constant tangential acceleration w_t, determined by the tangential component f_t:

$$f_t = f\cos\alpha = m\omega_t \quad (1)$$

The normal component of the force f together with the constraint force creates a normal acceleration.

Introducing angular acceleration $\beta = \frac{\omega_{t_t}}{\mathrm{r}}$ replaces equality (1) by the following expression:

$$f\cos\alpha = mr \times \beta$$

Multiplying the right and left-hand sides of this expression by r:

$$fr\cos\alpha = mr^2 \times \beta \quad (2)$$

The product $r\cos\alpha$ is equal to the length of the perpendicular dropped on the direction of the force from point O (Fig. 72). A quantity

$$M = fr\cos\alpha \quad (3)$$

numerically equal to the product of the force f by the length of the perpendicular dropped on the force direction from the point O (centre of rotation) is called the moment of force relative to the point O. A quantity

$$l = mr^2 \quad (4)$$

numerically equal to the product of the mass m of point A by the square of its distance from point O (centre of rotation) is called the moment of inertia of point A with respect to point O.

Let's rewrite equality (2) by introducing a moment of force M and a moment of inertia l:

$$M = l\beta \quad (5)$$

Comparing equations (1) and (5), we see that the angular acceleration is related to the moment of force M and moment of inertia l in the same way as the linear acceleration ω_t *is related to the force* f_t *and mass m of point A. When rotational motion is described with angular acceleration β, the moment of force M plays the role of a force, the moment of inertia l plays the role of a mass m. Under the influence of forces with equal moments, the point A acquires equal angular accelerations β. Therefore, different forces f are equivalent in the sense of rotation induced by them, if their moments are equal. Different material points obtain the same angular accelerations under the equal moments of forces if their moments of inertia are the same. Therefore, material points with different masses m are equivalent in the sense of the angular acceleration they acquire if their moments of inertia are equal.*

The following explanation is necessary here.

In this case, the force f and its tangential component f_t are both *constant* in magnitude, which also determines the *constant* tangential acceleration w_t according to formula (1).

The angle $\propto$ is also constant, which means that the force f is constant in magnitude, but not constant in direction, since it also rotates together with the rigid constraint on a circle with radius r. Therefore, the angle $\propto$ *is not* the angle of rotation of the material point A around the circle (the latter is not shown in Fig. 72).

Another explanation concerns the expression ‘The normal component of the force f *together with the constraint force* creates a normal acceleration’. In fact, the normal component f_n of force f creates a normal acceleration w_n, *compensated* by the constraint force$w_{\text{св}} = -w_n$, so that the resulting acceleration vector $w_{\text{рез}} = w_n + w_{\text{св}} = w_n - w_n = 0$. Therefore, no motion in the direction of vector f_n occurs.

That is, Figure 72 represents a *linearly accelerated* rotation, which, like any linearly accelerated motion, cannot be infinite. Such rotation corresponds to the *beginning* of motion before its transition to uniform rotation at force $= 0$.

Next, let us comment on the expression ‘Introducing angular acceleration $\beta = \frac{w_t}{r}$ ’. It can be introduced, of course, but why and what does it mean? What is the meaning of this introduction? What does this value mean, what is its physical meaning? The answer is as follows. It is necessary both for comparing circular motions of different points with unequal radii r and for comparing different circular motions. What is the problem here? In circular motion, unlike linear motion, the travelled distance S, velocity V and acceleration a of different points having different radii of rotation r are proportional to these radii r, i.e. *do not keep constant* values $S = k_1 r$, $V = k_2 r$, $a = k_3 r$, where k_1, k_2, k_3 are coefficients of proportionality. Moreover, these coefficients, except for k_1, are not just numerical, i.e. mathematical, which is possible for different quantities of the same physical meaning, but *physical*, since the terms of these proportions have *different* physical meaning and unequal dimensions.

Therefore, comparisons for different points or different motions must be made either at the same value of the radius r or by other physical characteristics INDEPENDENT of it. Such physical characteristics, independent of the radius r, are precisely these physical coefficients k_1, k_2, k_3.

They are called respectively: k_1 – angular/motion, k_2 – angular/velocity, k_3 – angular/acceleration. That is, they are physical quantities determined by the formulas

$k_1 = \frac{S}{r}$, $k_2 = \frac{V}{r}$, $k_3 = \frac{a}{r}$. In contrast to S, V, a, they already *do not depend* on radius r and therefore can be used for comparison of any circular motions at any radius of rotation.

The taking of these relations $\frac{S}{r}$, $\frac{V}{r}$, $\frac{a}{r}$ is called as a *reduction* of linear characteristics of motion S, V, a to the given, in this case, to a unit radius of rotation r.

This is the physical meaning of the introduction of angular/acceleration $\beta = \frac{w_t}{r}$, which is not explained in this fragment.

Then, the quantity $= f_t r$, called the *moment of force* with respect to the point O, is introduced. The word *moment* refers to the category of *time*, so its use here is not quite clear and requires explanation, since M in this case is a *constant*, independent of the time *moment*.

Another quantity $I = mr^2$, called the *moment of inertia* of point A with respect to point O, is also introduced. It too is a *constant*, independent of the time *moment*, so the word *moment* used in both cases seems incomprehensible.

And both these additional physical quantities are introduced only in order to obtain this dependence: $M = I\beta$, where β is the angular acceleration, equal to $\beta = \frac{w_t}{r}$, similarly to how the force f in linear motion is related to the mass m by the acceleration w of the material point A according to Newton's second law ($f = mw$).

Such a presentation is *not heuristic*, i.e. it does not give an indication of the course of thought that led to the introduction of these additional characteristics.

Terminology

First let's look at the names themselves.

Moment of force (synonyms: moment, torque, rotational force, turning effect).

What is the physical meaning of the concept of a *moment of force*? The reader looking for an answer in all kinds of dictionaries, technical reference books or textbooks will immediately encounter an additional difficulty: the tendency of these sources to give an answer preferably in a *general* form, with which the reader will have to deal long and tediously, while the opposite should be done – start with the simplest, even a particular case, but understandable. In this case, the definition of the *moment/of/force* is quite simple, even elementary: it is the product of the acting/force f_t by the *arm/of/force* or the *lever/arm*. And what is an *arm/of/force*? It is also quite simple: it refers to the shortest/distance from the line/of/force to the centre or axis/of/rotation. A force is directed along a straight line, and its point of application can be anywhere on that straight line, so it is not the distance from the point of application to the centre or axis/of/rotation that is specified, but the shortest/distance from that straight line. This is called the arm/of/force or lever/arm. It is as if there really was a lever h_1 or h_2 that had a force F applied to its end (Fig. 2).

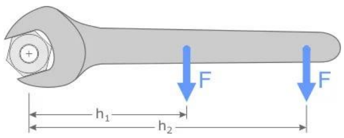


Fig. 2. Arm/of/force or h_1 or h_2 lever/arm

Fig. 3 shows the two forces $\overrightarrow{F_1}$ and $\overrightarrow{F_2}$ and their respective arms/of/force or lever/arms I_1, I_2. This picture is correct.

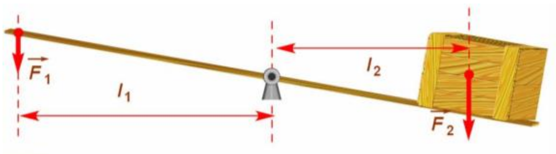


Fig. 3. Arm/of/force or lever/arm (correct picture)

And Fig. 4 shows the arms/of/force or lever/arms incorrectly. The author did not understand the question.

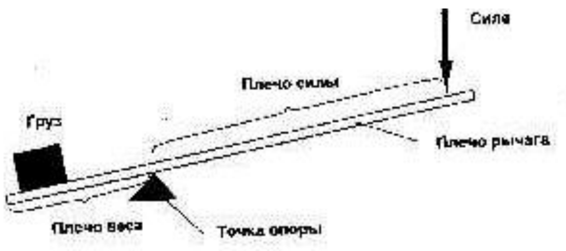


Fig.4. Arm/of/force or lever/arm (wrong picture)

So, in Fig. 72, the *moment/of/force* M is the product of the acting/force f_t н by the *arm/of/force* or the *lever/arm*. In this case, the arm/of/force is just the radius/of/rotation r.

That is, $M = f_t r$. This is clear.

Now the main question: why do we need it? Well, here's why.

But in order to correctly answer this question, it is first necessary to give a physical model of motion that corresponds to this statement.

Correct model of motion

This is the model (Fig. 5).

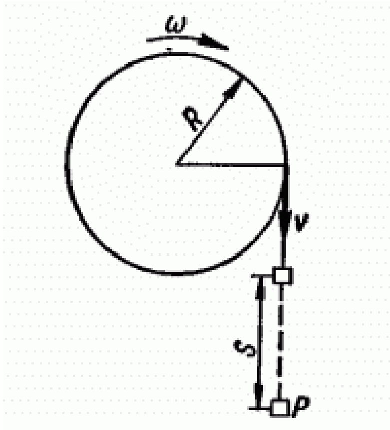


Fig. 5. Model of the motion described in the textbook

What is shown here? A disc of mass m and radius R, propelled by a load connected to it by a thread wrapped around it. The load moves vertically downwards under the action of the gravitational/force P, causing this disc in a linearly/accelerated/rotation. In this case, the gravitational/force P is the tangential/component f_t, shown in Figure 72 of the textbook. It is now clear why it is a constant. After all, it is just a constant weight P of the load.

In such a linearly/accelerated/motion, the linear/velocity V is proportional to the linear/acceleration a and the time of motion t: $V = at$, and the distance travelled S satisfies the relation $S = \frac{at^2}{2}$. But this is not what matters for a rotating disc. What matters is that, unlike translational motion, where all points have the *same* velocity V, the linear/velocity V of rotational/motion is unequal at different points on the disc, i.e. a *non-constant* quantity proportional to the radius R. For example, at the centre/of/rotation, $V = 0$. And the same, independent of the radius R, i.e. a *constant* quantity, is the ratio $\frac{V}{R}$ called the *angular/velocity* of rotation ω: $\omega = \frac{V}{R}$. This is the angular/velocity ω that distinguishes all rotations from one another. This means that angular/velocity ω was invented and introduced for a reason, to distinguish or compare different rotations with each other.

And what can be said about acceleration a? In linearly accelerated motion, the linear/acceleration a is proportional to the velocity V by the formula $a = \frac{V}{t}$, where t is the time/of/motion. And the velocity V at different points of the rotating disc, as already mentioned, is not the same and is determined by the radius R by the formula $a = kR$. Therefore, the acceleration is $a = \frac{V}{t} = \frac{kR}{t}$, i.e. it is just as non-constant, determined by the radius R. And constant for any radius R is a ratio $\frac{a}{R}$, called *angular/acceleration* β, i.e. $\beta = \frac{a}{R}$.

The introduction of this angular/acceleration β, like the angular/velocity ω, is not arbitrary, but is necessary to describe the linearly/accelerated/rotation for any point on the disc at any radius of rotation R.

So, for any point of non-uniform translational/motion, the concepts of linear/velocity V and linear/acceleration a are used, and for any point of non-uniform rotation, angular/velocity ω and angular/acceleration β.

Formal description

To go from the tangential/component f_t of the acting/force f to the moment/of/force M in Fig. 72, just multiply f_t by the arm/of/force or the lever/arm. In this case by r. To do this, multiply both parts of the formula $f_t = ma = mr\beta$ by r and get $f_t r = mr^2\beta$.

Or $M = mr^2\beta$. The expression mr^2 is called the moment/of/inertia I, i.e. $I = mr^2$. Here it is a constant value. Wouldn't it be better to call it just *inertia*? So we get: $M = I\beta$.

In translational/motion, according to Newton's second law, $f = ma$, and in rotational motion, $M = I\beta$, where the force f_t is replaced by the moment/of/force M, where $M = f_t r$, mass m is replaced by the moment/of/inertia I, where $I = mr^2$, and linear/acceleration a is replaced by angular/acceleration β.

So, the force f in translational/motion is equal to the product of the mass m by the acceleration a, and the moment/of/force M in *rotational* motion is equal to the product of the moment/of/inertia I by angular/acceleration β.

This is an expression of *Newton's second law* for rotational motion instead of translational motion. For any point of its rotation.

Indeed, $M = f_t r$, $I = mr^2$, $\beta = \frac{a}{r}$. Let's substitute these physical values into the formula $M = I\beta$. We obtain $f_t r = mr^2 \frac{a}{r}$. Or, after reduction by r, finally $f_t = ma$.

This is Newton's normal second law, merely liberated from the unusual notation.

Additional remark

Now, when we have suddenly, maybe even for ourselves, found out that we have just another form of Newton's second law, we ask ourselves: well, why all this? What does the introduction of new physical characteristics (moment/of/force $M = f_t r$, moment/of/inertia $I = mr^2$ and even angular/acceleration $\beta = \frac{a}{r}$) give us?

What was stopping us before? The dependence of linear/velocity V and linear/acceleration a on the lever/arm r, which we basically decided to wrestle with? By introducing angular velocity ω and acceleration β, now independent of r? Fine, but we CANNOT just introduce β instead of a, otherwise it would break Newton's second law, so we had to introduce together with introduction of angular acceleration β an additional factor r, i.e. $f_t = mr\beta$, because $f_t = mr\frac{a}{r} = ma$. Have we got rid of this dependence on r? Not at all, we simply multiplied the numerator and the denominator by the same r, but the equality remains the same. Then we introduced an additional concept, the moment/of/force M. For this purpose, we multiplied f_t by the same arm/of/force r and multiplied another part of equality by the same r to receive now the new expression $f_t r = mr^2\beta$. And by replacing only the notation in it, we have as a result of these IDENTICAL transformations the following expression: $M = I\beta$. Well, what is new about it? After all, it is the same as Newton's second law, but only in another form, that is, in other notations. Do we deceive ourselves, pretending that we have obtained some other, supposedly new, result?

I have already given an example of the same self-deception where *the same* relationship is expressed in two different forms of recording: the form of Pythagorean theorem $a^2 + b^2 = c^2$ and in the trigonometry formula $sin^2 \propto + cos^2 \propto = 1$, moreover, artificially referred to *different* sciences, allegedly expressing unequal results: http://www.sciteclibrary.ru/cgi-bin/public/YaBB.pl?num=1501411831.

Scalars and vectors

An additional distinction, which makes it extremely difficult to understand, is as follows.

In translational motion, according to Newton's second law, the acting force f can be thought of as a *vector* $\vec{f}$ whose direction is determined by the acceleration vector $\vec{a}$, with mass *m* being just a *scalar*.

But in rotational motion this is no longer the case. The vector of linear/acceleration $\vec{a}$ is replaced here by a vector of angular/acceleration $\vec{\beta}$, whose direction not only does not coincide with the direction of the force vector $\vec{f}$, but is perpendicular to it. What does it mean, however, *is perpendicular*? It would be more correct to say that *they suppose* it to be perpendicular to it. But why is that?

Remember, how does angular acceleration appear in the first place? Because different rotation points have different numerical values of linear/acceleration a, – in order to bring them to the *same* numerical value. Emphasize: NUMERICAL value. And what does the direction of this vector have to do with it? Mathematically you can, of course, give it any direction, but physically it is not so. Otherwise we simply lose the physical meaning of angular/acceleration β, which in general is the same as that of linear acceleration a, except its numerical value. So, the vector $\vec{\beta}$ is not directed by itself at all, but *has been decided* to be directed in this way and not otherwise.

Likewise, the moment/of/inertia I, defined by the relationship $I = mr^2$, is physically completely analogous to the mass m of Newton's second law for translational motion, that is, it should be considered a scalar, not a vector. But for some reason it is also said to be a vector $\vec{I}$, which must, of course, be given some direction as well. So, the vector of the moment/of/force $\vec{M}$ is determined not by one vector of angular/acceleration $\vec{\beta}$, but by two vectors $\vec{I}$ and $\vec{\beta}$, i.e. it becomes their vector/product, which for uniqueness must also be given some direction that coincides or does not coincide with both or one of these two vectors. So they decided that the direction of the vector of moment/of/force $\vec{M}$ is *perpendicular* to the plane formed by these two initial vectors $\vec{I}$ and $\vec{\beta}$. Moreover, it must be additionally established in which direction from this plane (Fig. 6).

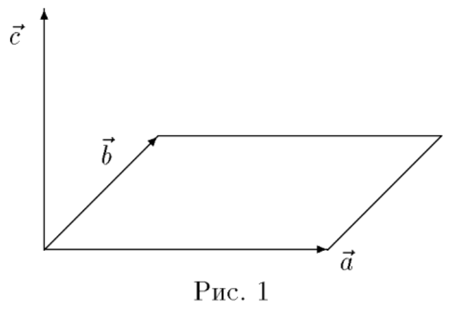


Fig. 6. Vector/product $\vec{c}$ of the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$

Bby introducing the right-hand/rules to establish this direction. And if we change the right hand to the left-hand, will we have to change the whole law of physics? Wouldn't it be easier to change this statement, abandoning the vector product as completely *unnecessary* complication?

In short, a whole rather complex science based on spatial representations has emerged, with the loss of the original understanding that it is merely a form of writing Newton's second law as applied to rotational/motion.

Here is a vivid example of the confusion, which suddenly appeared in the science with impossibility to understand all this for the whole generations of students. All that was needed was to return to the original *scalar* understanding of the moment/of/inertia I similar to the scalar understanding of mass m without any vector/products, which only obscure the essence of the question.

Next part

§ 37. Момент количества движения. Рассмотрим первоначально материальную точку с массой m, вращающуюся по окружности радиуса r (рис. 72). Для такой точки имеет место соотношение:

$$f \cos \alpha = m w_t, \qquad (1)$$

где f — сила, действующая на точку, а w_t — тангенциальная составляющая ее ускорения. Предположим, что сила f постоянна по величине и составляет один и тот же угол α с касательной к окружности во всех точках пути.

Тогда $w_t = \Delta v/\Delta t$, и равенство (1) принимает вид:

$$f \cos \alpha \cdot \Delta t = m \, \Delta v.$$

Умножая правую и левую части этого выражения на r, получим

$$fr \cos \alpha \cdot \Delta t = rm \, \Delta v. \qquad (2)$$

Величина $fr \cos \alpha$ представляет собой момент M силы f относительно центра вращения O; кроме того, ввиду постоянства массы m и радиуса r, выражение $rm \, \Delta v$ можно переписать в виде $\Delta (rmv)$.

Тогда равенство (2) примет вид:

$$M \, \Delta t = \Delta (rmv). \qquad (3)$$

Если момент сил M непостоянен, то в выражении (3) следует брать столь малый промежуток времени Δt, чтобы в течение этого промежутка времени момент сил M мог считаться постоянным. Для конечного промежутка времени можно ввести в рассмотрение среднее значение момента сил $\overline{M}$ и тогда

$$\overline{M} \, \Delta t = \Delta (rmv). \qquad (3a)$$

Величина $p = rmv$ называется *моментом количества движения* материальной точки, вращающейся по окружности, а $\overline{M} \, \Delta t$ — *импульсом момента сил.* Равенство (3) утверждает, что *изменение момента количества движения численно равно импульсу приложенного момента сил.* Оно аналогично равенству (4) § 17, выражающему связь между изменением количества движения и импульсом силы.

*§ 37. **Angular momentum.** Let us consider initially a material point of mass m rotating on a circle of radius r (Fig. 72). The following relation holds for such a point:*

$$f \cos \alpha = m\omega_t \quad (1)$$

where f is the force acting on the point, and ω_t is the tangential component of its acceleration. Suppose that the force f is constant in magnitude and makes the same angle α with the tangent to the circle at all points of the path.

Then $\omega_t = \Delta v / \Delta t$, *and equality (1) takes the following form:*

$$f \cos \alpha \times \Delta t = m \Delta v$$

By multiplying the right and left sides of this expression by r we obtain:

$$fr \cos \alpha \times \Delta t = rm \Delta v \quad (2)$$

The value $fr \cos \alpha$ *is the moment M of force f with respect to the centre of rotation O; moreover, in view of constancy of mass m and radius r, the expression* $rm\Delta v$ *can be rewritten as* $\Delta(rmv)$.

Then equality (2) will have the form:

$$M\Delta t = \Delta(rmv) \quad (3)$$

If the moment of force M is not constant, then in expression (3) we have to take a period of time Δt *so small that the moment of force M can be considered as constant during this period of time. For a finite period of time, we can take the average value of the moment of force* $\overline{M}$*:*

$$\overline{M}\Delta t = \Delta(rmv) \quad (3a)$$

The value $p = rmv$ *is called the angular momentum of a material point rotating on a circle, and* $\overline{M}\Delta t$ *is the momentum of the moment of forces. Equality (3) states that the change in angular momentum is numerically equal to the momentum of the applied moment of forces. It is the same as equation (4) of §17, expressing the relationship between the change in the angular momentum and the impulse.*

Here the expression $f_t r = mr\omega_t = mr\frac{\Delta V}{\Delta t}$ is first reduced to the form $f_t r \Delta t = mr\Delta V$.

Or $M\Delta t = \Delta(mrV)$, because mr is a constant.

The product mrV is called the *angular/momentum* p, i.e. $p = mrV$ and therefore $\Delta p = \Delta(mrV)$ is its change in time Δt. The product $M\Delta t$ is called is called the *momentum/of/the/moment/of/force*. You just have to remember that *the change of angular/momentum* Δp *is numerically equal to the applied momentum/of/the/moment/of/force* $M\Delta t$.

What this is all about is still unclear.

And the final, third part.

Из формул (3) и (4) следует, что *при отсутствии момента сил* ($M = 0$) *момент количества движения остается постоянным.* Это следствие известно под названием *закона сохранения момента количества движения.*

В частном случае движения материальной точки по окружности имеем из (3) при $M = 0$:

$$mvr = \text{const}. \tag{5}$$

В общем случае движения материальной точки при $M = 0$:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const}. \tag{6}$$

Для твердого тела из (4) при $M = 0$ следует:

$$I \cdot \omega = \text{const}. \tag{7}$$

В случае неизменного момента инерции, при отсутствии внешних сил, угловая скорость вращающегося тела остается постоянной; этот результат мы уже получали непосредственно из формулы (6а) § 35.

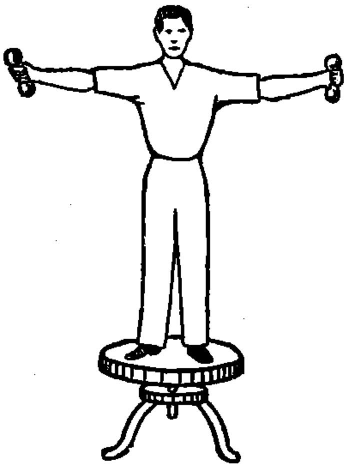


Рис. 81. При опускании рук с гирями человек начинает вращаться скорее.

Если, при отсутствии внешних сил, меняется момент инерции, то начинает меняться и угловая скорость ω, так что произведение $I\omega$ остается постоянным: если момент инерции I возрастает, то угловая скорость ω убывает, и наоборот.

Сохранение момента количества движения может быть продемонстрировано с помощью человека, стоящего на скамеечке, могущей без трения вращаться вокруг вертикальной оси („скамья Жуковского"). Пусть человек, держащий в расставленных руках гири (рис. 81), приведен вместе со скамеечкой во вращение с угловой скоростью ω. При этом человек имеет определенный момент количества движения $I\omega$, который, при равенстве нулю момента внешних сил, должен сохраняться. Если человек опустит руки, то его момент инерции уменьшится, в результате этого возрастет угловая скорость его вращения ω. Если человек снова поднимет руки, то угловая скорость ω примет прежнее значение.

Момент количества движения $\mathbf{P} = I\boldsymbol{\omega}$ есть величина *векторная*, имеющая то же направление, что и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Formulas (3) and (4) show that in the absence of moment of force (M = 0), the angular momentum remains constant. This consequence is known as the law of conservation of angular momentum.

In the particular case of motion of a material point on a circle we have from (3) at M = 0:

$$mvr = const \quad (5)$$

In the general case of motion of a material point at M = 0:

$$r \times mv = const \quad (6)$$

For a rigid body from (4) at M = 0:

$$I \times \omega = const \quad (7)$$

In the case of unchanged moment of inertia in the absence of external forces, the angular velocity of the rotating body remains constant; we have already obtained this result directly from formula (6a) §35.

If the moment of inertia changes in the absence of external forces, the angular velocity ω also changes, so that the product Iω remains constant: if the moment of inertia I increases, the angular velocity ω decreases, and vice versa.

Preservation of angular momentum can be demonstrated by means of a person standing on a bench that can rotate around a vertical axis without friction (Zhukovsky bench). Let the person holding dumbbells in his hands (Fig. 81) be rotated together with the bench with angular velocity ω. In this case, the person has a certain angular momentum Iω, which, if the momentum of external forces is equal to zero, must be conserved. If the person lowers his arms, his moment of inertia will decrease, resulting in an increase in the angular velocity of his rotation ω. If the person raises his arms again, the angular velocity ω will assume the same value.

Fig. 81. When the arms with weights are lowered, the person begins to rotate faster

The angular momentum P = Iω is a vector quantity having the same direction as the angular velocity vector ω.

Additional remark

Here, the moment/of/force $M = f_t r$ can be zero when the force $f_t = 0$, i.e. at a uniform/rotation with a constant linear/velocity V satisfying the condition of constancy of angular/momentum $p = mVr = const$. Hence $V = \frac{const}{mr} = \frac{const_1}{r}$: in the uniform rotation of a body of mass m, its linear/velocity V is inversely proportional to the radius/of/rotation r.

This is the only practical application of the concepts and their symbols introduced. As the radius r increases, the velocity V of rotation also decreases and vice versa, which is demonstrated in Fig. 81.

But how can the radius r be increased or decreased in a uniform rotation with constant linear/velocity $V = const$ with equality of centrifugal force $f_{цб}$, defined by $f_{цб} = \frac{mV^2}{r}$, and centripetal force $f_{цс}$, defined by counteraction of *constraint*? The answer is none, unless you artificially break the equality $f_{цс} = -f_{цб}$ by introducing an additional force $\pm\Delta f$. It does not matter whether it is called *external* or *internal*. Depending on the direction of this additional force Δf and its duration, the radius/of/rotation r and the corresponding linear/velocity V decrease or increase.

Let us consider this statement in detail.

Если, при отсутствии внешних сил, меняется момент инерции, то начинает меняться и угловая скорость ω, так что произведение *I*ω остается постоянным: если момент инерции *I* возрастает, то угловая скорость ω убывает, и наоборот.

If the moment of inertia changes in the absence of external forces, the angular velocity ω also changes, so that the product Iω remains constant: if the moment of inertia I increases, the angular velocity ω decreases, and vice versa.

It is too short and therefore incomprehensible.

What is the relation between the external force f_t and the moment of inertia I? Whether the external force f_t is greater than zero $f_t > 0$, less than zero $f_t < 0$ or equal to zero $f_t = 0$ does not emerge from the definition $I = mr^2$. It is also not clear which of the available illustrations is meant. The original Fig. 72 appears to be a *vertical* rotation. We propose Fig. 5 with the same vertical rotation, fully corresponding to Fig. 72, but Fig. 81 now shows a horizontal rotation, which requires some explanation.

Next, what is the difference between *external* and *internal* forces, and what are they in general? How can the moment of inertia change *in the absence of forces*? The change of the moment of inertia in Fig. 81 is obviously accompanied by the application of forces, even though they are called *internal* forces.

In short, we are faced with a pseudo-explanation. It may be understandable to someone who knows it better than the person explaining it, but a first-time learner will definitely need an explanation.

Let us state it again in our own words.

I suppose Fig. 5 can meet the requirement of absence of external forces, if we mentally cut a thread on it, but it is better to propose another scheme of rotation, closer to Fig. 81.

Let us take for this purpose a flat disc of mass M with the possibility of its free rotation about the vertical axis. We place a spoke with a nut put on it on top of this disc, with the possibility of its joint or independent rotation about the same vertical axis. The mass of the nut m must be much smaller than the mass of the flat disc M ($m << M$), and the mass of the spoke m_1 in turn much smaller than the mass of the nut m ($m_1 << m$). We will explain why this is necessary as we go along. The nut can be secured to this spoke or move freely in relation to it. First, we rigidly connect the rotation of the spoke with the nut attached to it with the rotation of the disc itself. Let this disc be rotated uniformly with angular/velocity ω. The spoke and the nut will also acquire an angular/velocity ω. When the disc and the spoke rotate uniformly, two counterbalancing forces act on the nut: centrifugal/force $f_{цб}$, defined by the formula $f_{цб} = ma_{цб} = m\frac{V^2}{r}$, where $a_{цб}$ is the centrifugal/acceleration, V is linear/velocity of nut rotation, r is its radius/of/rotation, and equal in magnitude and opposite in direction centripetal/force $f_{цс}$, defined as $f_{цс} = -f_{цб}$, called *constraint force*. The joint angular/velocity of the disc, spoke and nut is $= \frac{V}{r}$.

Let us now introduce the first change.

Let's break the rigid constraint of the nut with the spoke, making it possible to move it freely relative to the spoke. The centrifugal/force $f_{цб}$, determined by the linear/velocity V of the nut and its radius/of/rotation r, will be completely retained, and the centripetal/force $f_{цс}$ after the removal of the nut from the spoke will immediately disappear: $f_{цс} = 0$. Under the action of the only remaining force $f_{цб}$, the nut will enter accelerated motion along the spoke in the direction of increasing radius/of/rotation r. While maintaining the angular/velocity $\omega = const$ of its rotation, determined by the disc and the spoke, the linear velocity V will continuously increase due to an increase in the radius/of/rotation r: $V = \omega r = (const) \cdot r$. That is, the motion along the tangent to the circular rotation trajectory no longer becomes uniform, but accelerated with acceleration $a_к$ caused by a force $f_к$ whose direction is determined by the direction of the linear/velocity V. This force $f_к$ is called the *Coriolis/force.*

It is usually explained using the example of a river current that flows along the Earth's meridian, from north to south in the northern hemisphere (and vice versa in the southern hemisphere). The water of the river stream, too, is accelerating because of the Earth's rotation creating a centrifugal force $f_{цб}$ of the river stream even on a plain terrain, also known as the *equipotential surface* and, together with it, the Coriolis/force $f_к$ acting on this river stream in the direction from West to EastAccording to Newton's third law, the river current in its turn creates a counterforce $f_{пр}$ equal in magnitude and opposite in direction to the Coriolis/force $f_к$, i.e. $f_{пр} = -f_к$. In view of the inequality of the mass of the flowing river water m and the mass of the Earth M, where $m \ll M$, the counterforce $f_{пр}$ of the river current cannot change the angular/velocity $\omega_З$ of the Earth rotation and can only erode the right river bank with its gradual shift from East to West, if conditions of flat terrain allow.

Similarly, in the rotation model we consider, where the mass of the nut m is by definition much smaller than the mass M of the rotating disc $m \ll M$, the movement of the nut along the spoke, accompanied by an increase in its linear velocity V due to the Coriolis/force $f_к$, does not change the angular speed ω of the disc with the spoke $\omega = const$ by its counterforce $f_{пр} = -f_к$.

Let us now introduce a second change.

Let's break the constraint between the spoke and the rotating disc with the possibility of free rotation of the disc relative to the vertical axis. The Coriolis/force $f_к = 0$ generated by the rotating disc perpendicular to the spoke will immediately disappear. In the absence of the Coriolis/force $f_к = 0$, when the nut moves along the spoke under the influence of centrifugal force $f_{цб}$, the linear/velocity V no longer changes $V = const$, although its radius/of/rotation r still increases.

This means that the angular/velocity ω of the spoke with the nut becomes $\omega = \frac{V}{r} = \frac{const}{r}$, i.e. inversely proportional to the radius/of/rotation r. As the radius/of/rotation r increases, the nut impedes the rotation of the spoke by exerting a braking force $f_т$. The spoke, in turn, exerts a counterforce $f_{пр}$ on the nut, corresponding to the Coriolis/force. However, due to the known inequality of the masses of the nut m and the spoke m_1 $(m_1 << m)$, this counteraction does not change the angular/velocity ω, just as the river current does not change the Earth's rotation.

Let us introduce a third and final change.

Imagine at the end of the spoke, where the nut is now moving, a pad with a spring where the nut can impact in an elastic collision mode, thus acquiring the velocity V_2 along the spoke, equal in magnitude and opposite in direction to the velocity V_1 before the elastic collision $V_2 = -V_1$. The nut will begin to move along the spoke in the opposite direction, with its angular/velocity ω of rotation together with the spoke due to the conservation of the same dependence $\omega = \frac{const}{r}$ now no longer decreasing, but increasing until it approaches the axis of rotation, where the same pad with spring may also be installed. These forward and backward movements of the nut will produce an irregular circular rotation of the spoke as its angular/velocity ω increases or decreases, similar to the oscillations of a linear pendulum, in fact, of course, damped by the frictional resistance. This is what the ending of the phrase *‘the angular velocity ω decreases, and vice versa’* in our highlighted textbook fragment implies.

Additional remark

Let's now see an illustration of this relationship in Fig. 81. Here the mass M of the person is much greater than the mass m of each of his arms. It is on the vertical axis of rotation, i.e. it has a small linear/velocity V. The centres of mass m of each arm are located approximately in the middle, i.e. at the elbow. This is their maximum possible distance from the axis of rotation. When the arms are bent at the elbow, the centre of mass of each arm is moved away from the centre of rotation by a quarter of its length, and when they are lowered, the distance is minimised. This simulates the movement of a nut on a spoke with the possibility of changing the angular velocity ω of rotation. However, this bending and extending of the arms and their raising or lowering requires consideration of additional acting forces, only obscuring the understanding of what is happening. Also, to enhance the effect, dumbbells are taken in both hands, further pushing the centres of mass of the outstretched arms away from the centre of rotation.

In general, I think a more detailed consideration of this unequal rotation gives a much better understanding of it, where there is little need for additional physical characteristics.

Unevenly accelerated rotation

Let us now return to Fig. 72 and consider the possibility of unevenly accelerated rotation under the action of a force constant in both magnitude and direction.

Let's compare Fig. 72 with another figure from the same textbook, which illustrates an entirely different motion: the oscillation of a pendulum (Fig. 242), given in a completely different section of physics. Let us distinguish both these figures separately.

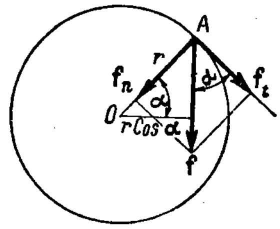


Рис. 72. Вращение точки A по окружности.

Fig. 72. Rotation of point A around a circle

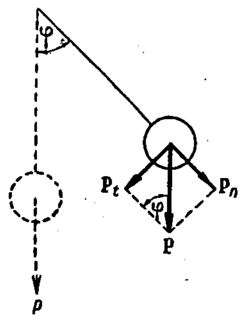


Рис. 242. Колебания маятника.

Fig. 242. Oscillations of a pendulum

Fig. 242 shows the oscillation of a pendulum under the action of gravity P.

How are the movements being compared different from each other? In Fig. 72, the acting force f has a non-constant direction and rotates together with the rotating disc, while this is not the case in Fig. 242. Here the acting force P is constant in both magnitude and direction, and only its tangential component P_t changes.

If the same happens in Fig. 72, the two movements would become indistinguishable, apart from the insignificant differences in the part of the notation.

Instead of the force f and its projections f_n and f_t as well as the angle $\propto$, shown in Fig. 72, Fig. 242 gives other notations: the gravity P and its projections P_n, P_t, as well as the angle$\varphi = 90^0 - \propto$. But these minor differences are not important at all. It is the same unevenly accelerated rotation under the influence of the tangential component P_t of gravity P.

But there is another, now *fundamental* difference. It concerns the acting forces f_n and P_n. As can be seen, these differently labelled projections have *opposite* directions, and no movement under the action of these projections occurs in both cases. For the pendulum in Fig. 242, the absence of motion is explained verbally as follows: the force P_n is counteracted by a reaction/force $F = -P_n$, equal in magnitude and opposite in direction, so that their vector sum in the direction of the radius of the pendulum is zero. Therefore, there is no movement in this direction, and this counterforce F is not shown in this figure. The projection P_t, on the other hand, has no counterforce, so there is movement in its direction.

Fig. 72 shows exactly the same situation, and there is no motion in the direction of the force projection f_n, as it too is hindered by the counterforce $F = -f_n$ of constraint, which is equal in magnitude and opposite in direction.

In case of uniform rotation, these really acting forces are called *centripetal* force and *centrifugal* force, and their values are equal and directions are opposite, so their vector sum is always equal to zero: http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/8713.html.

And in the case of the non-uniform motion shown in Fig. 72, as well as in the case of the pendulum in Fig. 242, the motion in the direction of radius r does not occur either, as it is prevented by exactly the same constraint force $F = -f_n$, equal in magnitude and opposite in direction.

So, both Fig. 72 and 242 are incomplete, as they do not show the counteracting constraint forces pointing in the opposite direction to the projections f_n and P_n. This is verbally stated, but may not be fixed in memory.

Complete and incomplete description

Let's now ask this question: is the description of the motion of the pendulum shown in Fig. 242 complete? Obviously, it is not, because here there is no initial position corresponding simultaneously to values $f_t = 0$ and linear velocity $= 0$. At the lowest extreme position of the pendulum,$f_t = 0$, but $V = V_{max}$, and both are not equal to zero in the intermediate positions, except for one single point, the extreme upper position, for the event of the pendulum not normally depicted. It is in it that both these values are zero: $f_t = 0$, $V = 0$, which corresponds to the beginning of motion.

So, in the unevenly accelerated rotation shown in Fig. 72, a variable force f_t acts *if the direction of force f is constant*.

At the initial position $\propto = 90^0$, the value $f_t = 0$, the linear velocity V_t of the circular motion is also zero$V_t = 0$. The force f_t then gradually increases according to the formula $f_t = fcos \propto$, where the applied force f is a constant value, corresponding to the weight P in Fig. 242, and reaches a maximum value $f_t = f$ at angle $\propto = 0$. The acceleration a_t in the direction of circular motion due to $f_t = ma_t$ is also correspondingly maximum $a_t = max$. The force f_t together with the acceleration a_t then gradually decreases according to the same formula $f_t = fcos \propto = ma_t cos \propto$ and turns to zero at angle $\propto = -90^0$. In this case, the velocity $V_t = max$. Then the whole process is repeated in reverse order.

And what else is important here? In this unevenly accelerated rotation, the forcef_t, linear/velocity V_t and linear/acceleration a_t are continuously changing, not maintaining constant values. Perhaps that is why the additional characteristics introduced (apart from the moment/of/inertia I) are called *moments*, having definite numerical values only at a *given moment* in time and then changing. One could just as well talk about the *momentary* force f_t, *momentary* velocity V_t and *momentary* acceleration a_t, but they are simply referred to as *variables*.

Fig. 242 also does not show the moment of the start of non-uniform motion when the acting force f_t and its linear/velocity V are equal to zero $f_t = 0, V = 0$. At the bottom position of the pendulum, the force f_t is zero, but this is not the start of motion because at this point its linear/velocity V is at its maximum $V = V_{max}$, not zero $V = 0$, to correspond to the start of motion. So where is this beginning of non-uniform motion? At the topmost position, opposite the bottommost position, at which the acting force P_t is also zero $P_t = 0$.

And to place the body of the pendulum in this initial position, a force must be applied and some work must be done.

This initial position is unstable. The slightest displacement $\pm\Delta\varphi$ causes an unevenly accelerated motion to start in one direction or the other. In one case we obtain a reversible oscillating movement, in the other we obtain an unevenly accelerated circular rotation.

Unevenly accelerated rotation

Where do we encounter rotation with uneven acceleration? At the beginning of motion, when, for example, the wheels of a car, previously stationary, start rotating, increasing the linear/velocity V of rotation to its maximum values, after which it turns into a uniform motion with linear/acceleration $a = 0$ and $V = const$. Or during deceleration, when the reverse process of deceleration of rotation occurs at the limit value to zero $V = 0$. In both cases, the non-uniform rotation process is *finite*. It is also possible to jerk it back and forth by continuous shifting, as is done in traffic jams.

Can unevenly accelerated rotation be continuous?

And finally, the last important question: Can unevenly accelerated rotation be continuous? That is, can it be self-propelled without any external control? The answer is: yes, it can.

Here are some examples of such rotation (Fig. 7-10).

Fig. 7. Sunwheel

Here is a record of a continuous rotation with variable linear/velocity V and linear/acceleration a in a strength exercise called the sunwheel (Fig. 11).

Fig. 8. Full loop on swing

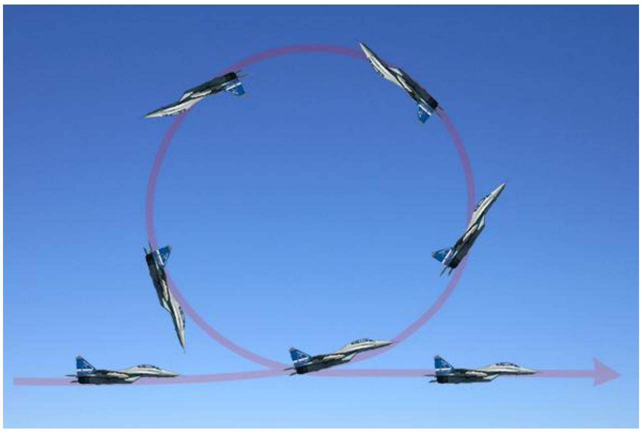


Fig. 9. Nesterov's loop

Fig. 10. And finally, just running

Here is a record of a continuous rotation with variable linear/velocity V and linear/acceleration a in a strength exercise called the sunwheel (Fig. 11).

Fig. 11. Sunwheel

It is exactly spinning, i.e. it is an *unevenly accelerated circular* motion. In the top position, the motion stops (linear rotation velocity turns to zero), then it accelerates and in the bottom position the linear rotation velocity becomes maximum (Fig. 12).

Fig. 12. In the top position, the motion stops and then it accelerates

The same happens in an oscillating pendulum except that the angular amplitude of oscillation of the pendulum shown in Fig. 242 does not reach 180°. At the top point of circular motion at angular amplitude $\propto_{max}= 180^{\circ}$, the pendulum stalls in a state of unstable equilibrium. The linear/velocity V of the circular motion and the force f acting on it in the direction of this linear velocity are both zero, but with a slight angular deviation $\Delta\propto$ (positive or negative) the pendulum comes to an accelerated *forward* or *backward* motion. A backward movement corresponds to an oscillating pendulum with an angular amplitude of 180°, while a forward movement means a transition from an oscillating movement to an unevenly accelerated circular rotation.

In conclusion

Unevenly accelerated circular rotation in Fig. 7-12 fully corresponds to oscillatory motion with the amplitude of oscillation $\propto_{max} = 180^0$ *without reversing the direction of motion of* Fig. 242. Additional physical characteristics are not necessary at all.